递归初步

信智学院　陈琰宏

教学内容

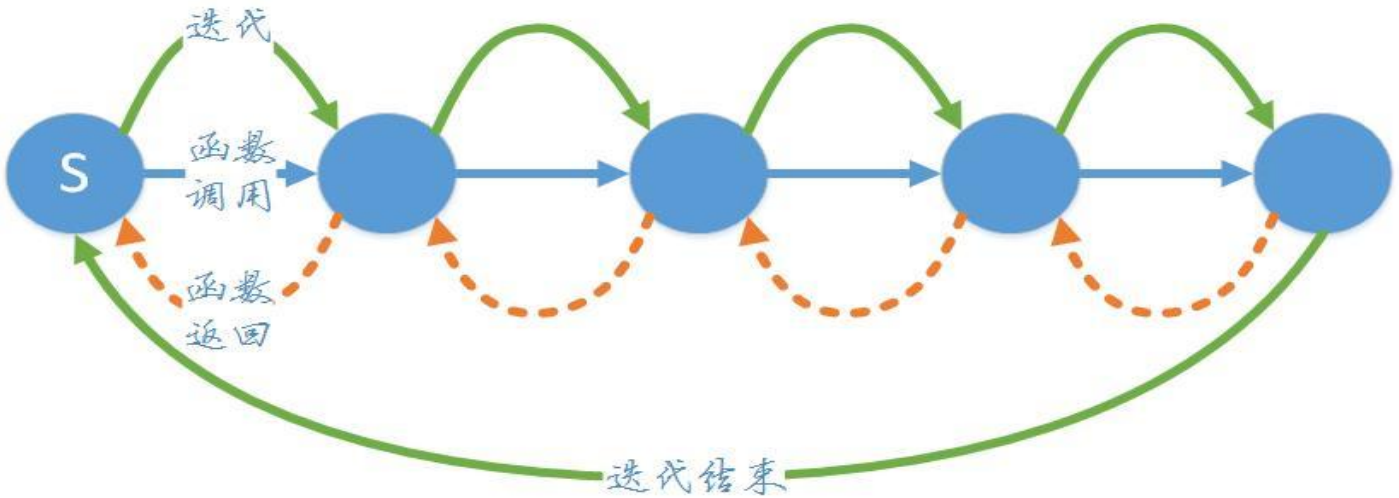
01 理解递归

02 熟练应用递归解决一些实际问题

03 体验递归的审题分析和细节测试

1 递归概念

- 递归是一种重要的算法思想。
- 递归特点是：函数或过程调用它自己本身。其中直接调用自己称为直接递归，而将A调用B，B以调用A的递归叫做间接递归。
- 递归既可以实现**递推过程**，也可以实现求解诸多问题的通用思路—**搜索**。



1.1什么是递归

在数学上，求n的阶乘，有两种表示方法：

① **n! = n×(n-1)×(n-2)×…×2×1**

② **n! = n×(n-1)!**

这两种表示方法实际上对应到两种不同的算法思想。

第①种表示方法中，求n！要反复把1、2、3、…、(n-2)、(n-1)、n累乘起来，是循环的思想，要用**循环结构**来实现。

第②种表示方法，求n！时需要用到(n-1)！。如果有一个函数**Factorial(int n)**能实现求n的阶乘，则该函数在求n！时要使用到表达式：**n*Factorial(n-1)**，Factorial(n-1)表示调用Factorial( )函数去求(n-1)！。

例1.1 递归求阶乘

第②种表示方法，求n！时需要用到(n-1)！。如果有一个函数**Factorial(int n)**能实现求n的阶乘，则该函数在求n！时要使用到表达式：**n*Factorial(n-1)**，Factorial(n-1)表示调用Factorial( )函数去求(n-1)！。具体代码如下：

```
int Factorial( int n )
{       if( n<0 ) return -1;
        else if( n==0 || n==1 ) return 1;
        else return n*Factorial(n-1);
}
int main( )
{       int  n;  scanf( "%d", &n );
        printf( "%d!=%d\n", n, Factorial(n) );
        return 0;
}
```

Factorial( )调用了Factorial( )函数，这种函数称为**递归函数**

//递归调用Factorial函数

该程序的运行示例如下：

```
4↙
4!=24
```

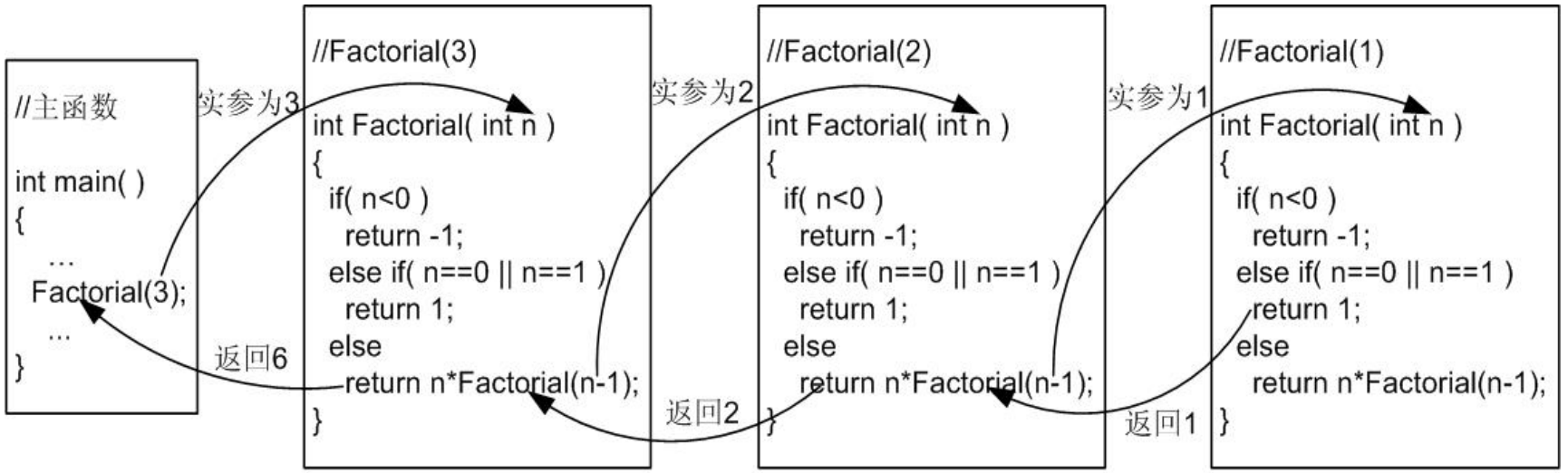
1.1什么是递归

```
16  int main()
17  {
18      cout<<fac3(3);
19      return 0;
20  }
```

```
12  int fac3(int n){
13      return n*fac2(n-1);
14  }
```

```
 8  int fac2(int n){
 9      return n*fac1(n-1);
10  }
```

```
4  int fac1(int n){
5      return 1;
6  }
```



Fractorial(3)的执行过程

假设要求3!，其完整的执行过程如图所示，具体过程为：

①执行**main**函数的开头部分；

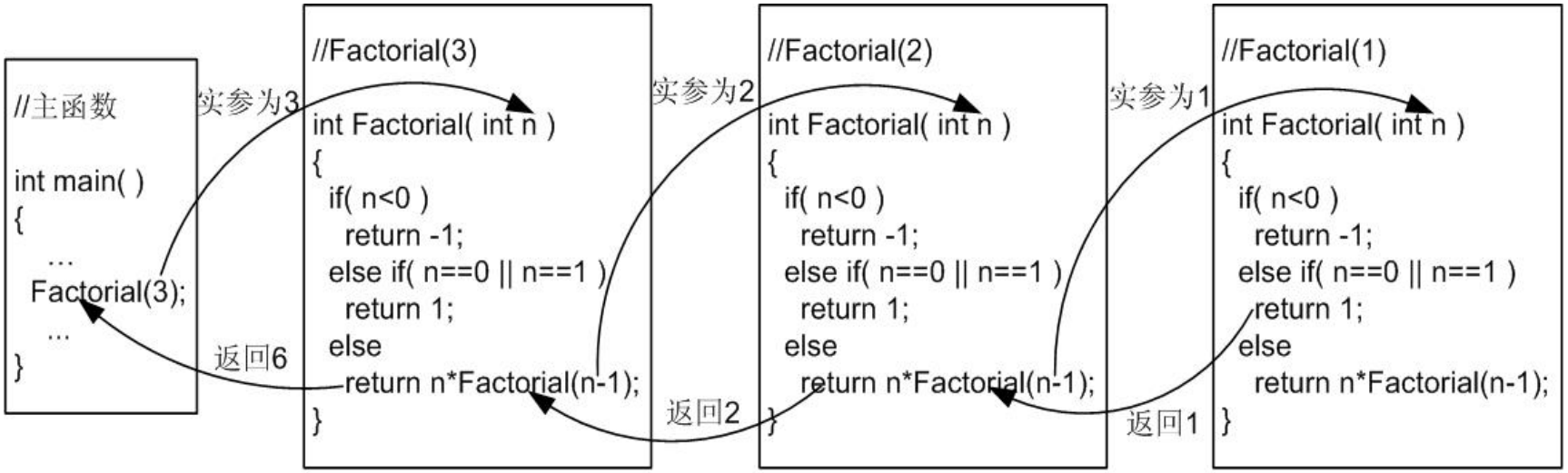
②当执行到Factorial函数调用 “**Factorial(3)**”时，流程转而去执行**Factorial(3)**函数，并将实参3传递给形参n；

③执行**Factorial(3)**函数的开头部分；

④当执行到递归调用Factorial(n-1)函数时，此时n-1=2，所以要转而去执行**Factorial(2)**函数；

⑤执行**Factorial(2)**函数的开头部分；

⑥当执行到递归调用Factorial(n-1)函数时，此时n-1=1，所以要转而去执行**Factorial(1)**函数；



Fractorial(3)的执行过程

⑦执行**Factorial(1)**函数，此时因为n的值为1，所以返回1，而不是再递归调用下去，即，Factorial(1)函数执行完毕，返回到上一层，即返回**Factorial(2)**函数中；

⑧执行完**Factorial(2)**函数的剩余语句，返回到**Factorial(3)**函数中；

⑨执行完**Factorial(3)**函数的剩余语句，返回到**main**函数中；

⑩继续执行**main**函数的剩余部分直到整个程序执行完毕。

[2470] 阶乘

输入n，请用递归的方式求n的阶乘。

```
1  #include <iostream>
2  using namespace std;
3  int f(int x)
4  {
5      if(x==1||x==0) return 1;
6      return x*f(x-1);
7  }
8
9  int main()
10 {
11     int n;
12     cin>>n;
13     cout<<f(n)<<endl;
14     return 0;
15 }
```

[2739]猴子吃桃问题

例1.2。猴子第1天摘下若干个桃子，当即吃了一半，还不过瘾，又多吃了一个。第2天早上又将剩下的桃子吃掉一半，又多吃了一个。以后每天早上都吃了前一天剩下的一半另加一个。到第10天早上想再吃时，就只剩下一个桃子了。求第1天共摘了多少个桃子。

分析：

假设Ai为第i天吃完后剩下的桃子的个数，**A1表示第一天共摘下的桃子**，本题要求的是A1。有以下递推式子：

A1 = 2×(A2+1) A1：第1天吃完后剩下的桃子数
A2 = 2×(A3+1) A2：第2天吃完后剩下的桃子数
……
A9= 2×(A10+1) A9：第9天吃完后剩下的桃子数
A10 = 1

以上递推过程可分别用**循环结构**和**递归函数**实现。

用递归思想实现：

前面所述的递推关系也可以采用下面的方式描述。假设第n天吃完后剩下的桃子数为**A(n)**，第n+1天吃完后剩下的桃子数为**A(n+1)**，则存在的推关系：**A(n) = (A(n+1) + 1) * 2**。这种递推关系可以用递归函数实现，代码如下：

```
int A(int n)
{
        if(n>=10) return 1;
        else return(2*(A(n+1)+1));
}
int main( )
{
        printf( "total=%d\n", A(1) );
        return 0;
}
```

该程序的输出结果：

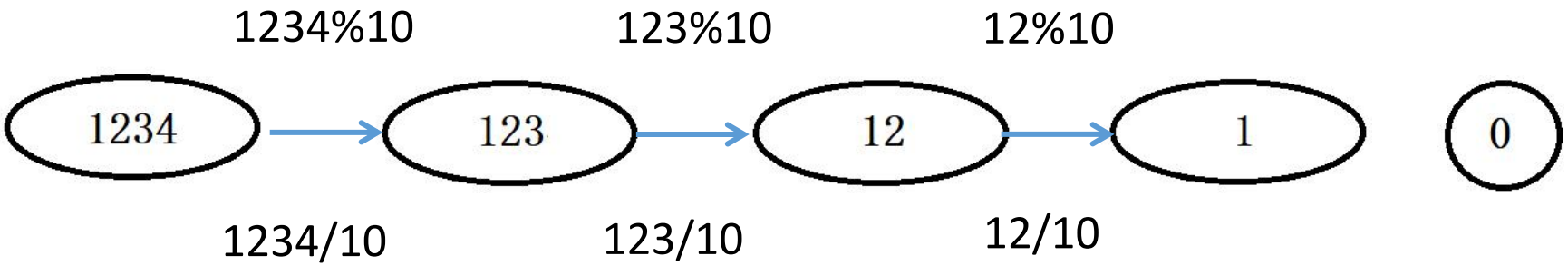
total=1534

[2739]猴子吃桃问题

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int n;
4  int f(int m){
5      if(m==n)
6          return 1;
7      else
8          return 2*(f(m+1)+1);
9  }
10 int main(){
11     cin>>n;
12     printf("total=%d",f(1));
13     return 0;
14 }
```

[2208] 求一个整数的各位数字之和

输入一个整数，求它的各位数字之和。



f(n)=f(n/10)+n%10

[2208] 求一个整数的各位数字之和

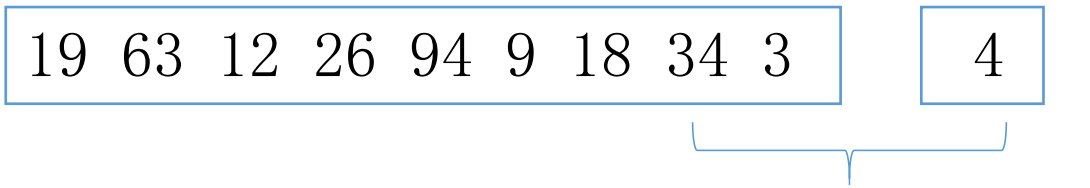
```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int f(int n){
4      if(n==0)
5          return 0;
6      else
7          return n%10+f(n/10);
8  }
9  int main(){
10     int n;
11     cin>>n;
12     cout<<f(n);
13      return 0;
14 }
```

```
1   #include<bits/stdc++.h>
2   using namespace std;
3   int f(int n){
4       if(n==___1_____)
5           return ___2_______;
6       else
7           return ___3_______;
8   }
9   int main(){
10      int n;
11      cin>>n;
12      cout<<f(n);
13       return 0;
14  }
```

[2198] 求最小值

输入10个整数，求出其中的最小值。

19 63 12 26 94 9 18 34 3 4



min(f(n-1),a[n])

f(n)=min(f(n-1),a[n])

[2198] 求最小值

```
1   #include<bits/stdc++.h>
2   using namespace std;
3   int a[11];
4   int fmin(int a[],int i)
5   {    if (i==1)
6            return a[1];
7        else
8        return min(fmin(a,i-1),a[i]);
9   }
10
11  int main(){
12       int i,min;
13       for(i=1;i<=10;i++) scanf("%d",&a[i]);
14       min=fmin(a,10);
15       printf("%d",min);
16       return 0;
17  }
```

[2198] 求最小值

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int a[11];
4  int fmin(int a[],int i)
5  {    if (i==___1_____)
6           return __2_____;
7       else
8       return ___3_____
9  }
10
11 int main(){
12      int i,min;
13      for(i=1;i<=10;i++) scanf("%d",&a[i]);
14      min=fmin(a,10);
15      printf("%d",min);
16      return 0;
17 }
```

[2460] 最大公约数

思考：在初等数学里是如何求两个数的最大公约数?

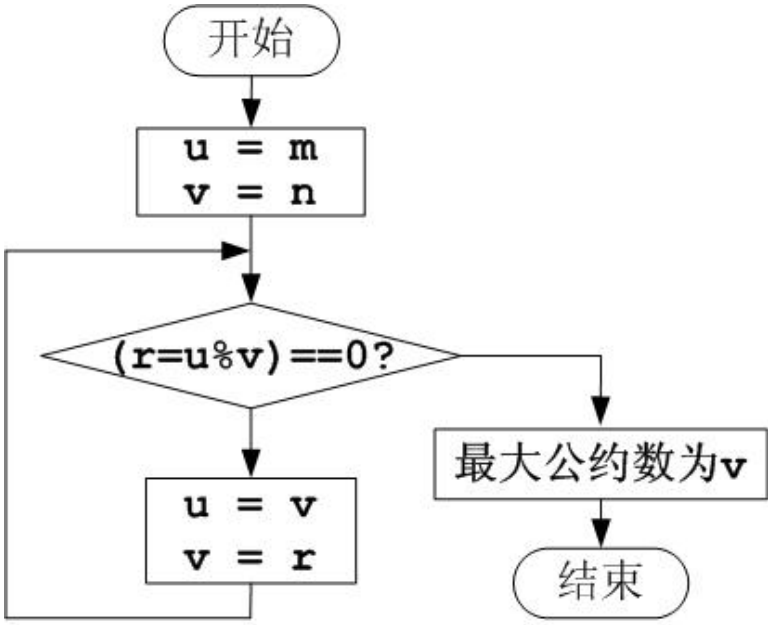
分析：

数论中有一个求最大公约数的算法称为**辗转相除法**，又称**欧几里德(Euclid)算法**。其基本思想及执行过程为(设m为两正整数中较大者，n为较小者)：

(1) 令u = m，v = n；

(2) 取u对v的余数，即r = u%v，**如果r的值为0，则此时v的值就是m和n的最大公约数**，否则执行第(3)步；

(3) u = v，v = r，即u的值为v的值，而v的值为余数r。并转向第(2)步。

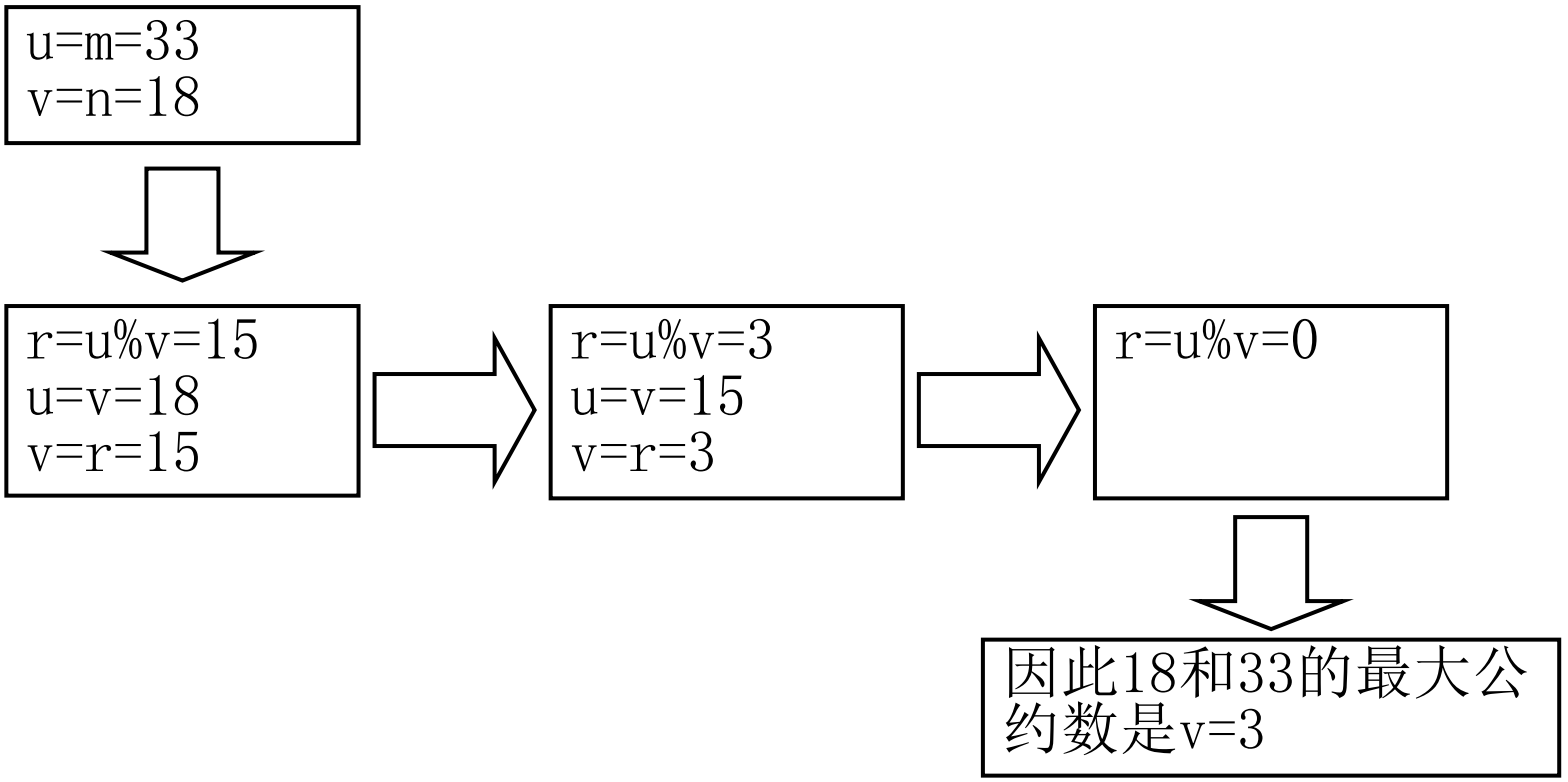


辗转相除法的流程图

[2460] 最大公约数

假设输入的两个正整数为18和33，则m = 33，n = 18。

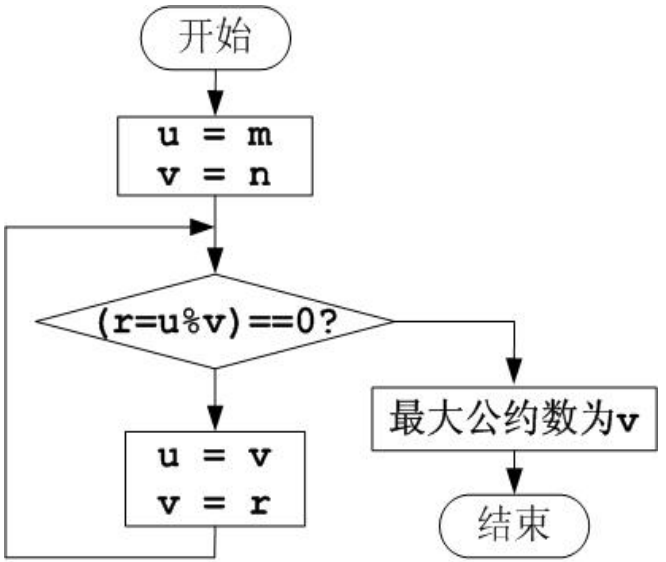
辗转相除法求最大公约数的过程如下图所示。



[2460] 最大公约数

辗转相除法的思想也可以采用**递归方法**实现。其递归思想是：在求最大公约数过程中，如果u对v取余的结果为0，则最大公约数就是v；否则**递归**求v和u%v的最大公约数。因此，上述代码中的gcd函数可改写成：

```
int gcd( int u, int v ) //求u和v的最大公约数
{
        if( u%v==0 )  return v;
        else  return gcd(v, u%v);
}
```

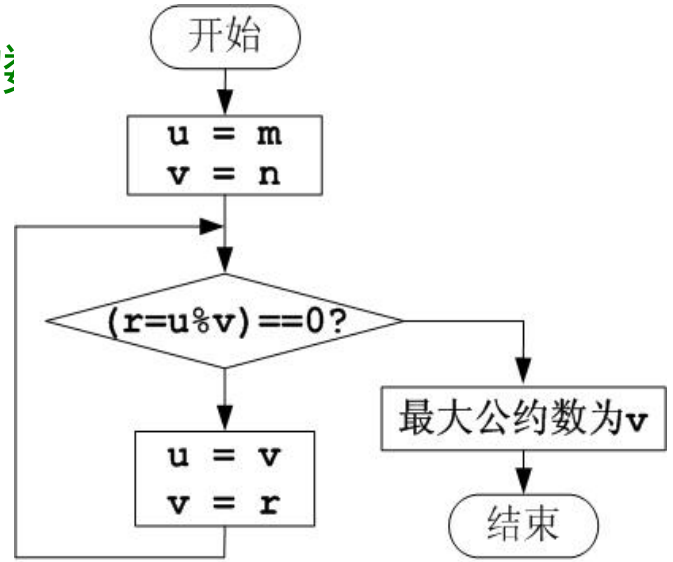


辗转相除法的流程图

在使用上述递归gcd函数求“**gcd(33,18)**”时，要递归调用“**gcd(18,15)**”；在执行“**gcd(18,15)**”时又递归调用“**gcd(15,3)**”；而在执行“**gcd(15,3)**”时，因为15%3的结果为0，所以最终求得的最大公约数为3。

[2460] 最大公约数

```
int gcd( int u, int v )        //求u和v的最大公约
{
        int r;
        while( (r=u%v)!=0 )
        {  u=v;  v=r;  }
        return(v);
}
int main( )
{
        int m, n, t;
        scanf( "%d%d", &m, &n );
        if( m<n )              //交换m和n，使得m为二者较大者
        {  t = m;  m = n;  n = t;  };
        printf( "%d.\n",   gcd(m,n) );
        return 0;
}
```



辗转相除法的流程图

[2646]角谷猜想

角谷猜想，是指对于任意一个正整数，如果是奇数，则乘3加1，如果是偶数，则除以2，得到的结果再按照上述规则重复处理，最终总能够得到1。如，假定初始整数为5，计算过程分别为16、8、4、2、1。程序要求输入一个整数，将经过处理得到1的过程输出来。

5*3+1=16
16/2=8
8/2=4
4/2=2
2/2=1
End

递归式：

奇数　f(n)=f(n*3+1)

偶数　f(n)=f(n/2)

退出条件　n=1

分析 n=5

```
int main(){
    f1(5);
}
```

```
void f1(int n){
    if(n%2){
        cout<<n<<"*3+1="<<n*3+1<<"\n";
        f2(n*3+1);
    }
    else{
        cout<<n<<"/2="<<n/2<<"\n";
        f2(n/2);
    }
}
```

n=16

```
void f2(int n){
    if(n%2==0){
        cout<<n<<"/2="<<n/2<<"\n";
        f3(n/2);
    }
}
```

n=8

```
void f3(int n){
    if(n%2==0){
        cout<<n<<"/2="<<n/2<<"\n";
        f4(n/2);
    }
}
```

n=4

```
void f4(int n){
    if(n%2==0){
        cout<<n<<"/2="<<n/2<<"\n";
        f5(n/2);
    }
}
```

n=2

```
void f5(int n){
    if(n==1)
    {
        cout<<"End";
        return;
    }
}
```

n=1

```
3  void f(int n){
4      if(n==1)
5      {
6          cout<<"End";
7          return;
8      }
9      if(n%2){
10         cout<<n<<"*3+1="<<n*3+1<<"\n";
11         f(n*3+1);
12     }
13     else{
14         cout<<n<<"/2="<<n/2<<"\n";
15         f(n/2);
16     }
17 }
```

```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  void f(int n){
18 int main(){
19     int n;
20     cin>>n;
21     f(n);
22 }
```

[2401] 冒泡法排序

输入10个整数，求出其中的最小值。

19 63 12 26 94 9 18 34 3 4

19 12 26 63 9 18 34 3 4 | 94

12 19 26 9 18 34 3 4 | 63

12 19 9 18 26 3 4 | 34

…… …… …… ……

[2401] 冒泡法排序

```
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
void f(int a[],int n){
    if(n==1)
        return;
    for(int i=1;i<n;i++){
        if(a[i]>a[i+1])
            swap(a[i],a[i+1]);
    }
    f(a,n-1);
}
```

```
int main(){
    int a[11];
    for(int i=1;i<=10;i++){
        cin>>a[i];
    }
    f(a,10);
    for(int i=1;i<=10;i++){
        cout<<a[i]<<" ";
    }
    return 0;
}
```

[3044] 最大公约数和最小公倍数

输入二个正整数x0，y0，求出满足下列条件的P，Q的个数条件：

1. P，A是正整数；
2. 要求P，Q以x0为最大公约数，以y0为最小公倍数。

求满足条件的所有可能的两个正整数的个数。

每个测试文件只包含一组测试数据，每组两个正整数x0和y0（2<=x0<100000，2<=y0<=1000000）。

对于每组输入数据，输出满足条件的所有可能的两个正整数的个数。

[3044] 最大公约数和最小公倍数

样例数据的说明：
输入3 60
此时的P Q分别为:

3	60
15	12
12	15
60	3

所以，满足条件的所有可能的两个正整数的个数共4种。

样例输入
3 60
样例输出
4

P,Q的最大公约数为x0，即
gcd（P,Q）=x0（gcd为求最大公约数的函数），并且
P*Q/gcd（P,Q）=y0，

显然，

P*Q=x0*y0

可以看做

P=x0*y0/Q，

同时要满足P,Q为正整数，并且

gcd（P,Q）=x0

```cpp
#include<iostream>
using namespace std;
int gcd(int a, int b)
{
    return b ==0 ?a:gcd(b, a%b);
}    //用于求a和b的最大公约数
int main()
{
    int n, m, sum;
    cin >> n >> m;
    sum = n*m;
    int num = 0;
    for (int i = 1; i <= sum; i++)
    {
        if (sum % i == 0)
        {
            if (gcd(i, sum / i) == n)
                num++;     //当同时满足P和Q的最大公约数为n时，即P,Q满足条件
        }    //判断P和Q是否都为整数，并且P*Q=sum=n*m
    }
    cout << num << endl;
}
```

1 递归理解

一般来说，能够用递归解决的问题应该满足以下三个条件：

- 需要解决的问题可以转化为一个或多个子问题来求解，而这些子问题的求解方法与原问题完全相同，只是在数量规模上不同。
- 递归调用的次数必须是有限的。
- 必须有结束递归的条件来终止递归。

2 何时使用递归

在以下三种情况下，常常要用到递归的方法。

1．定义是递归的

有许多数学公式、数列等的定义是递归的。例如，求n!和Fibonacci数列等。这些问题的求解过程可以将其递归定义直接转化为对应的递归算法。

1.1 何时使用递归

2.数据结构是递归的

有些数据结构是递归的。例如单链表就是一种递归数据结构，其结点类型声明如下：

```
typedef struct LNode
{    ElemType data;
     struct LNode *next;
} LinkList;
```

结构体LNode的定义中用到了它自身，即指针域next是一种指向自身类型的指针，所以它是一种递归数据结构。

1.1 何时使用递归

对于递归数据结构，采用递归的方法编写算法既方便又有效。例如，求一个不带头结点的单链表L的所有data域（假设为int型）之和的递归算法如下：

```
int Sum(LinkList *L)
{   if (L==NULL)
        return 0;
    else
        return(L->data+Sum(L->next));
}
```

例1：递归求和

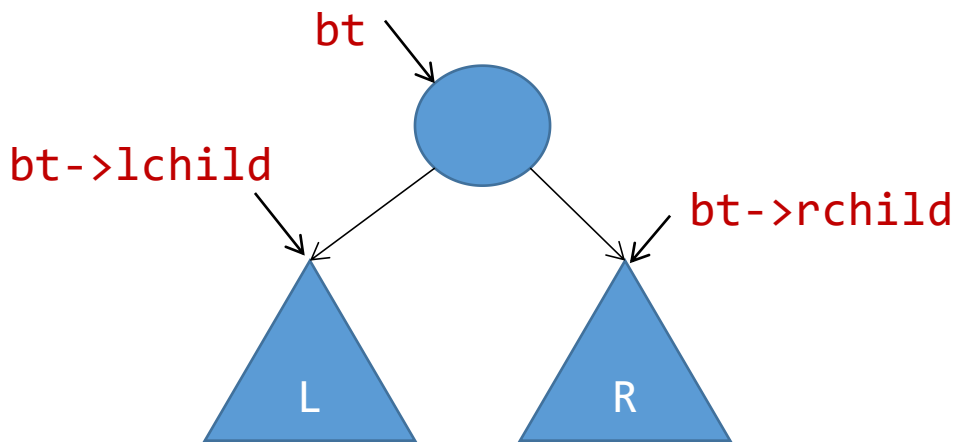
```
1  #include<bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int a[11]={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10};
4  int sum(int n){
5      if(n==0)return 0;
6      else return a[n]+sum(n-1);
7
8  }
9  int main()
10 {
11     cout<<sum(10)<<endl;
12 }
```

```
5  int sum(int n){
6      cout<<s<<endl;
7      if(n==0)s=0;
8      else s=a[n]+sum(n-1);
9      return s;
10 }
```

例2：二叉树求和

设计求非空二叉链bt中所有结点值之和的递归算法，假设二叉链的data域为int型。

```
typedef struct BNode
{    int data;
     struct BNode *lchild, *rchild;
} BTNode;          //二叉链结点类型
```




```
int Sumbt(BTNode *bt)          //求二叉树bt中所有结点值之和
{  if (bt->lchild==NULL && bt->rchild==NULL)
      return bt->data;         //只有一个结点时返回该结点值
   else                        //否则返回左、右子树结点值之和加上根结点值
      return Sumbt(bt->lchild)+ Sumbt(bt->rchild)+bt->data);
}
```

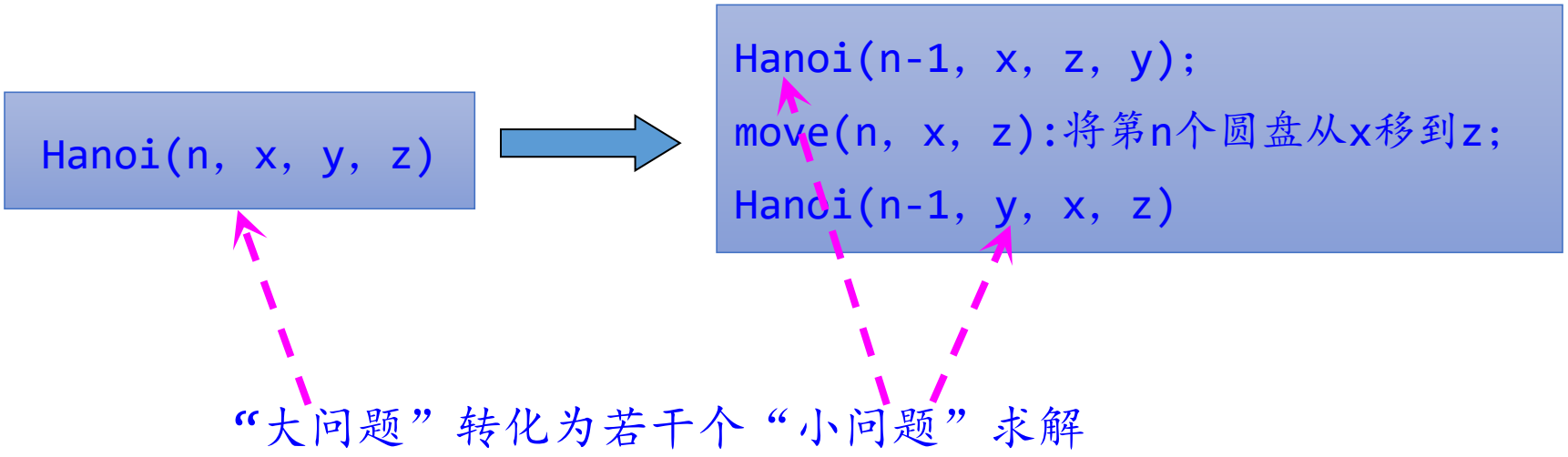
1.1 何时使用递归

3．问题的求解方法是递归的

有些问题的解法是递归的，典型的有Hanoi问题求解。

盘片移动时必须遵守以下规则：每次只能移动一个盘片；盘片可以插在X、Y和Z中任一塔座；任何时候都不能将一个较大的盘片放在较小的盘片上。

设Hanoi(*n*，*x*，*y*，*z*)表示将*n*个盘片从*x*通过*y*移动到*z*上，递归分解的过程是：



1.2 递归模型

递归模型是递归算法的抽象，它反映一个递归问题的递归结构。例如前面的递归算法对应的递归模型如下：

```
fun(1)=1                          (1)
fun(n)=n*fun(n-1)       n>1       (2)
```

其中，第一个式子给出了递归的终止条件，第二个式子给出了fun(*n*)的值与fun(*n*-1)的值之间的关系，我们把第一个式子称为递归出口，把第二个式子称为递归体。

一般地，一个递归模型是由递归出口和递归体两部分组成，前者确定递归到何时结束，后者确定递归求解时的递推关系。

递归出口的一般格式如下：

$$f(s_1)=m_1$$

这里的s_1与m_1均为常量，有些递归问题可能有几个递归出口。

递归体的一般格式如下：

$$f(s_{n+1})=g(f(s_i),\ f(s_{i+1}),\ \cdots,\ f(s_n),\ c_j,\ c_{j+1},\ \cdots,\ c_m) \qquad (2.2)$$

其中，n、i、j和m均为正整数。这里的s_{n+1}是一个递归“大问题”，s_i、s_{i+1}、…、s_n为递归“小问题”，

1.2.1 递归算法的执行过程

- 一个正确的递归程序虽然每次调用的是相同的子程序，但它的参量、输入数据等均有变化。
- 在正常的情况下，随着调用的不断深入，必定会出现调用到某一层的函数时，不再执行递归调用而终止函数的执行，遇到递归出口便是这种情况。

- 递归调用是函数嵌套调用的一种特殊情况，即它是调用自身代码。也可以把每一次递归调用理解成调用自身代码的一个复制件。
- 由于每次调用时，它的参量和局部变量均不相同，因而也就保证了各个复制件执行时的独立性。

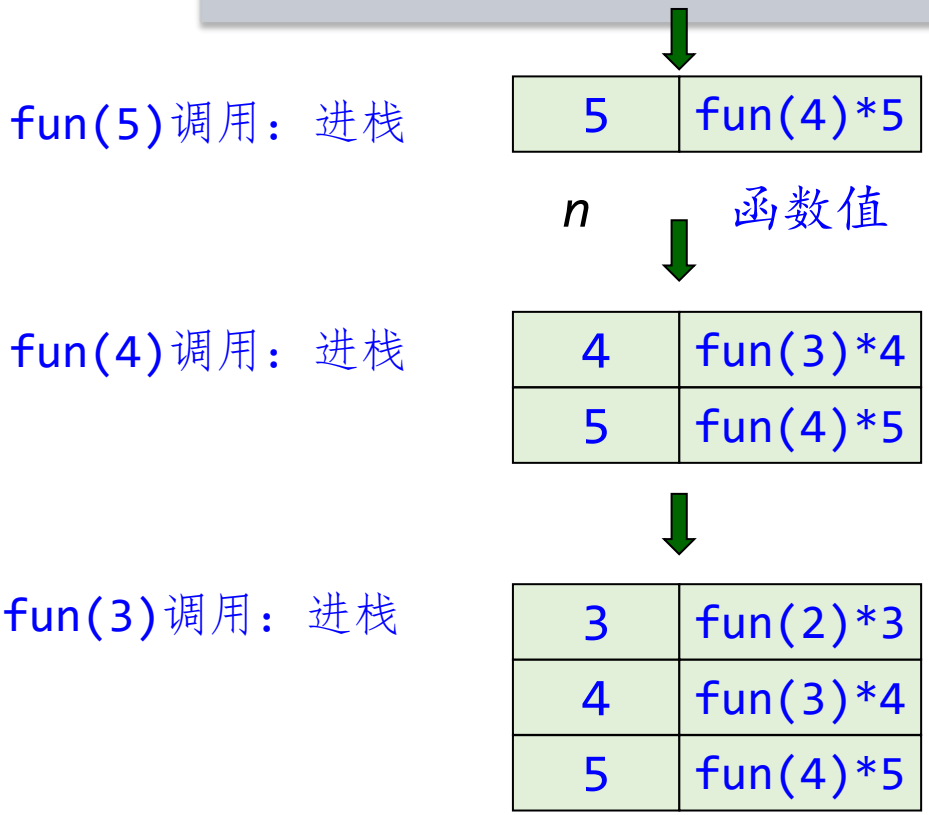
1.2.1 递归算法的执行过程

- 系统为每一次调用开辟一组存储单元，用来存放本次调用的返回地址以及被中断的函数的参量值。
- 这些单元以系统栈的形式存放，每调用一次进栈一次，当返回时执行出栈操作，把当前栈顶保留的值送回相应的参量中进行恢复，并按栈顶中的返回地址，从断点继续执行。

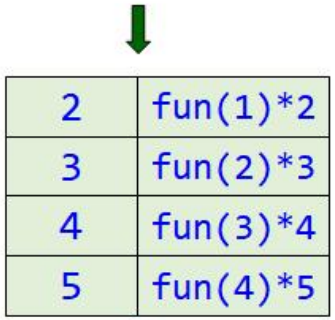
求5!

执行fun(5)时内部栈的变化及求解过程如下：

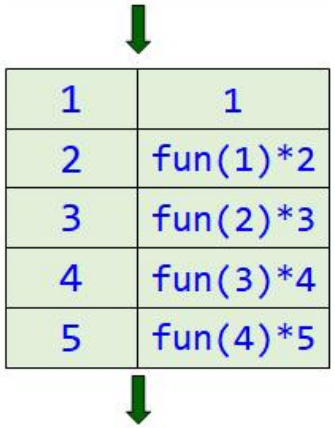
```
void main()
{  printf("%d\n", fun(5));   }
```



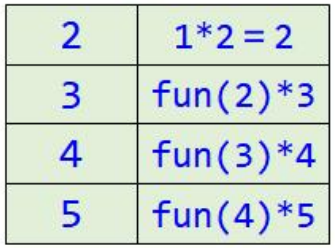
fun(2)调用：进栈

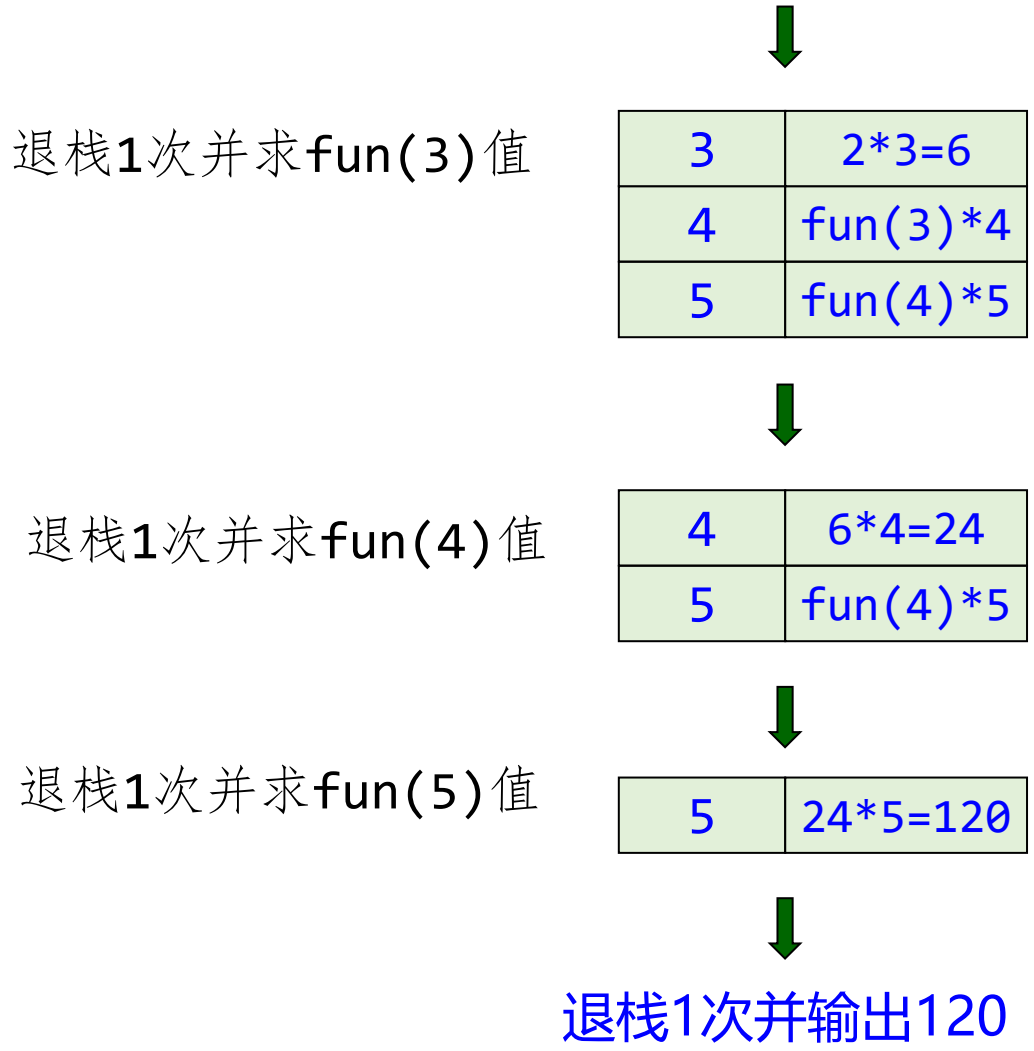


fun(1)调用：进栈并求值



退栈1次并求fun(2)值




退栈1次并求fun(3)值
3
2*3=6
4
fun(3)*4
5
fun(4)*5
退栈1次并求fun(4)值
4
6*4=24
5
fun(4)*5
退栈1次并求fun(5)值
5
24*5=120
退栈1次并输出120

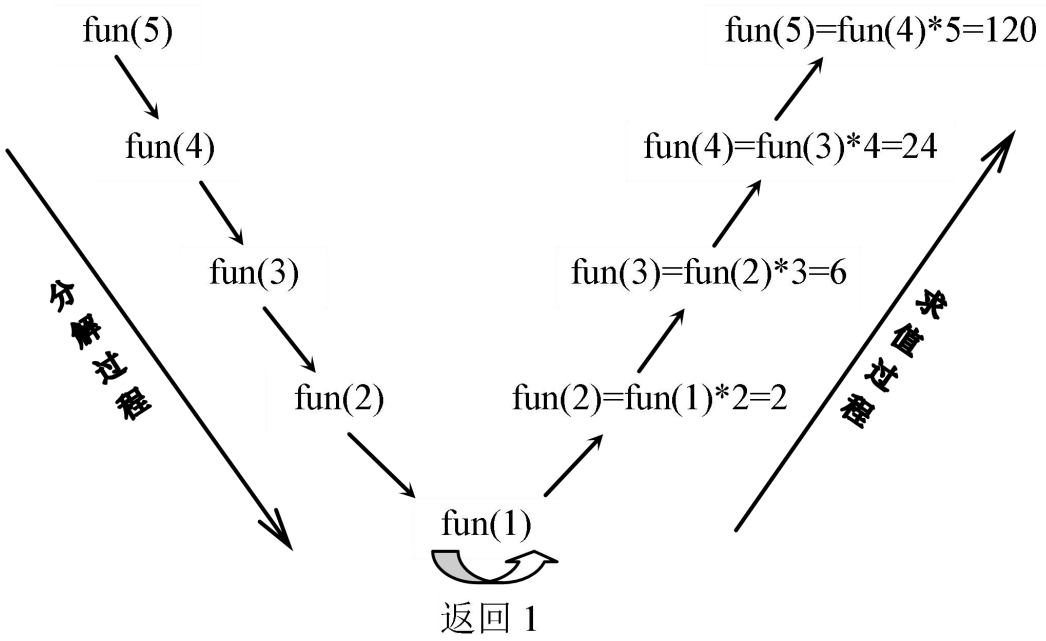
1.2.1递归算法的执行过程

从以上过程可以得出：

- 每递归调用一次，就需进栈一次，最多的进栈元素个数称为递归深度，当*n*越大，递归深度越深，开辟的栈空间也越大。
- 每当遇到递归出口或完成本次执行时，需退栈一次，并恢复参量值，当全部执行完毕时，栈应为空。

1.2.1 递归算法的执行过程

归纳起来，递归调用的实现是分两步进行的，第一步是分解过程，即用递归体将“大问题”分解成“小问题”，直到递归出口为止，然后进行第二步的求值过程，即已知“小问题”，计算“大问题”。前面的fun(5)求解过程如下所示。



Fibonacci数列定义为：

$$Fib(n)=1 \quad n=1$$

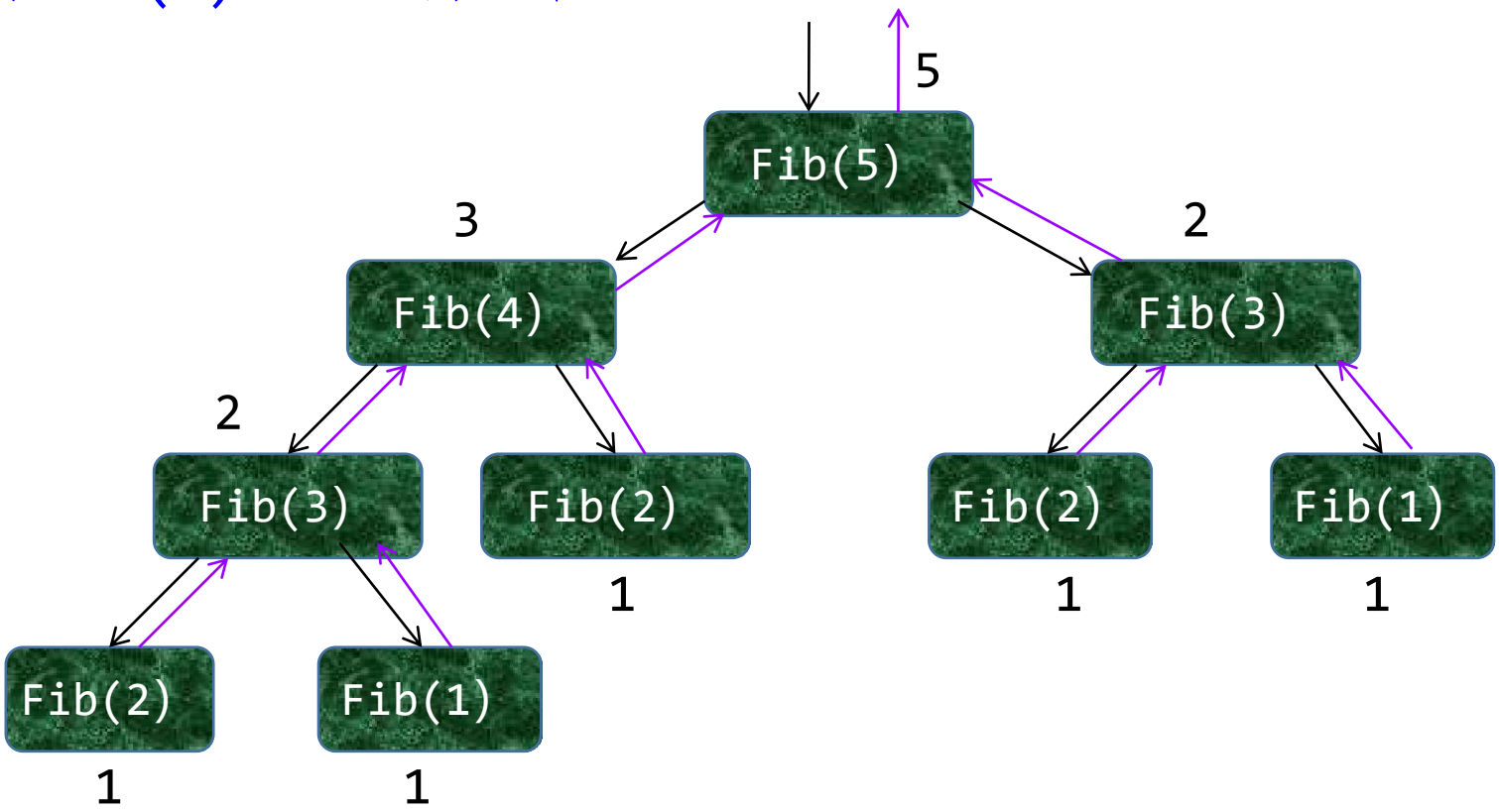
$$Fib(n)=1 \quad n=2$$

$$Fib(n)=Fib(n-1)+Fib(n-2) \quad n>2$$

对应的递归算法如下：

```
int Fib(int n)
{   if (n==1 || n==2)
        return 1;
    else
        return Fib(n-1)+Fib(n-2);
}
```

求Fib(5)的递归树如下：



从上面求Fib(5)的过程看到，对于复杂的递归调用，分解和求值可能交替进行、循环反复，直到求出最终值。

- 在递归函数执行时，形参会随着递归调用发生变化，但每次调用后会恢复为调用前的形参，将递归函数的非引用型形参的取值称为状态。
- 递归函数的引用型形参在执行后会回传给实参，有时类似全局变量，不作为状态的一部分，在调用过程中状态会发生变化，而一次调用后会自动恢复为调用前的状态。

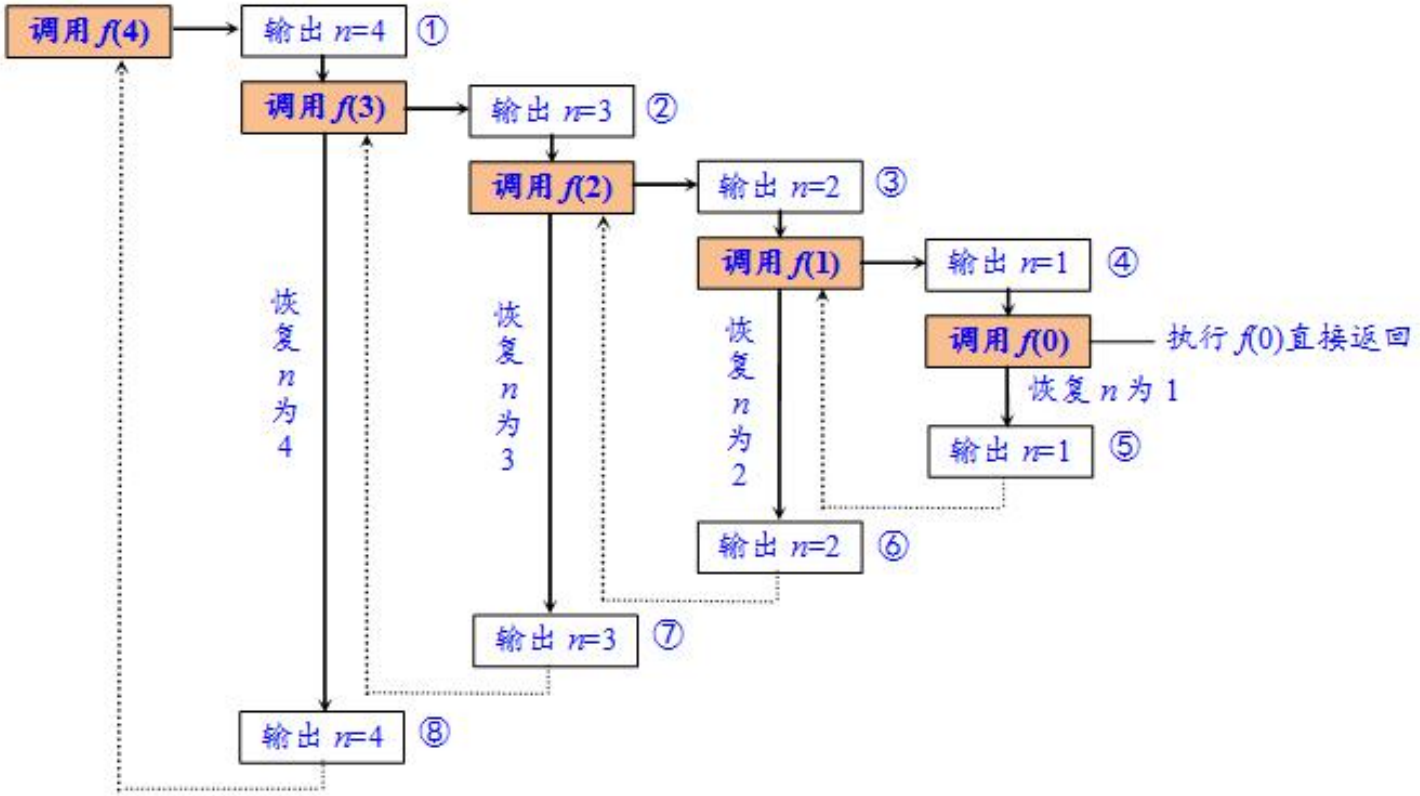
例如，有以下递归程序：

```
1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  int  f(int n)
4  {
5      if (n<1) return 1;
6      else
7      {
8          printf("调用f(%d)前，n=%d\n",n-1,n);
9          f(n-1);
10         printf("调用f(%d)后:n=%d\n",n-1,n);
11     }
12 }
13 int main(){
14     cout<<f(5);
15     return 0;
16 }
```

执行结果

```
调用f(3)前，n=4
调用f(2)前，n=3
调用f(1)前，n=2
调用f(0)前，n=1
调用f(0)后：n=1
调用f(1)后：n=2
调用f(2)后：n=3
调用f(3)后：n=4
```

在上述递归函数f中，状态为（n），其递归执行过程如图所示，输出框旁的数字表示输出顺序，虚线表示本次递归调用执行完后返回，从中看到每次递归调用后状态都恢复为调用前的状态。



1.2.2 递归算法设计步骤

递归算法设计先要给出**递归模型**，再转换成对应的C/C++语言函数。

（1）对原问题$f(s_n)$进行分析，抽象出合理的“小问题”$f(s_{n-1})$（与数学归纳法中假设$n=k-1$时等式成立相似）；

（2）假设$f(s_{n-1})$是可解的，在此基础上确定$f(s_n)$的解，即给出$f(s_n)$与$f(s_{n-1})$之间的关系（与数学归纳法中求证$n=k$时等式成立的过程相似）；

（3）确定一个特定情况（如$f(1)$或$f(0)$）的解，由此作为递归出口（与数学归纳法中求证$n=1$或$n=0$时等式成立相似）。

例3：用递归法求一个整数数组a的最大元素。

解：设$f(a, i)$求解数组a中前i个元素即$a[0..i-1]$中的最大元素，则$f(a, i-1)$求解数组a中前$i-1$个元素即$a[0..i-2]$中的最大元素，前者为“大问题”，后者为“小问题”。

假设$f(a, i-1)$已求出，则有$f(a, i)=\text{MAX}\{f(a, i-1), a[i-1]\}$。递推方向是朝$a$中元素减少的方向推进，当$a$中只有一个元素时，该元素就是最大元素，所以$f(a, 1)=a[0]$。

由此得到递归模型如下：

$$f(a, i)=a[0] \quad \text{当} i=1 \text{时}$$
$$f(a, i)=\mathrm{MAX}\{f(a, i-1), a[i-1]\} \quad \text{当} i>1 \text{时}$$

对应的递归算法如下：

```
int fmax(int a[], int i)
{   if (i==1)
        return a[0];
    else
        return(fmax(a, i-1), a[i-1]);
}
```

例4：简单选择排序和冒泡排序

【问题描述】对于给定的含有n个元素的数组a，分别采用简单选择排序和冒泡排序方法对其按元素值递增排序。

1．简单选择排序

设$f(a, n, i)$用于对$a[i..n-1]$元素序列（共$n-i$个元素）进行简单选择排序，是“大问题”.

$f(a, n, i+1)$用于对$a[i+1..n-1]$元素序列（共$n-i-1$个元素）进行简单选择排序，是“小问题”。

当$i=n-1$时所有元素有序，算法结束。

$f(a, n, i)$ ≡ 不做任何事情，算法结束　　当$i=n-1$

$f(a, n, i)$ ≡ 通过简单比较挑选$a[i..n-1]$中的最小元素$a[k]$放在$a[i]$处；　　否则

$f(a, n, i+1)$;

```
void SelectSort(int a[], int n, int i)
{   int j, k;
    if (i==n-1) return;          //满足递归出口条件

    else
    {   k=i;                     //k记录a[i..n-1]中最小元素的下标
        for (j=i+1;j<n;j++)      //在a[i..n-1]中找最小元素
            if (a[j]<a[k])
                k=j;
        if (k!=i)                //若最小元素不是a[i]
            swap(a[i],a[k]);     //a[i]和a[k]交换

        SelectSort(a, n, i+1);
    }
}
```

2．冒泡排序

设$f(a, n, i)$用于对$a[i..n-1]$元素序列（共$n-i$个元素）进行冒泡排序，是“大问题”，则$f(a, n, i+1)$用于对$a[i+1..n-1]$元素序列（共$n-i-1$个元素）进行冒泡排序，是“小问题”。当$i=n-1$时所有元素有序，算法结束。

$f(a, n, i)$ ≡ 不做任何事情，算法结束　　当$i=n-1$

$f(a, n, i)$ ≡ 对$a[i..n-1]$元素序列，从$a[n-1]$开始
进行相邻元素比较；　　否则
若相邻两元素反序则将两者交换；
若没有交换则返回，否则执行$f(a, n, i+1)$;

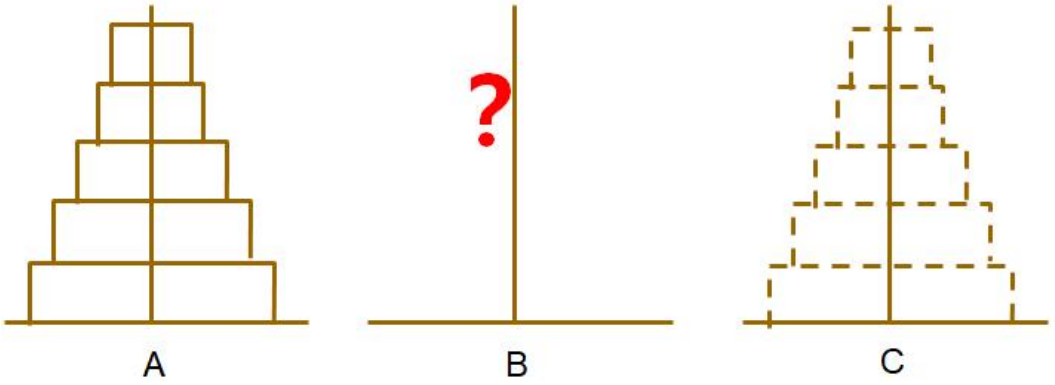
```
void BubbleSort(int a[], int n, int i)
{   int  j;
    bool exchange;
    if (i==n-1) return;                    //满足递归出口条件

    else
    {   exchange=false;                    //置exchange为false
        for (j=n-1;j>i;j--)
            if (a[j]<a[j-1])               //当相邻元素反序时
            {    swap(a[j],a[j-1]);
                 exchange=true;            //发生交换置exchange为true
            }
        if (exchange==false)               //未发生交换时直接返回
            return;
        else                               //发生交换时继续递归调用
            BubbleSort(a, n, i+1);
    }
}
```

1.2.3[2749]汉诺塔问题

约19世纪末，在欧州的商店中出售一种智力玩具，在一块铜板上有三根杆，最左边的杆上自上而下、由小到大顺序串着由64个圆盘构成的塔。目的是将最左边杆上的盘全部移到中间的杆上，条件是一次只能移动一个盘，且不允许大盘放在小盘的上面。
这是一个著名的问题，几乎所有的教材上都有这个问题。由于条件是一次只能移动一个盘，且不允许大盘放在小盘上面，所以64个盘的移动次数是：18,446,744,073,709,551,615这是一个天文数字，若每一微秒可能计算(并不输出)一次移动，那么也需要几乎一百万年。我们仅能找出问题的解决方法并解决较小N值时的汉诺塔，但很难用计算机解决64层的汉诺塔。假定圆盘从小到大编号为1, 2, ...

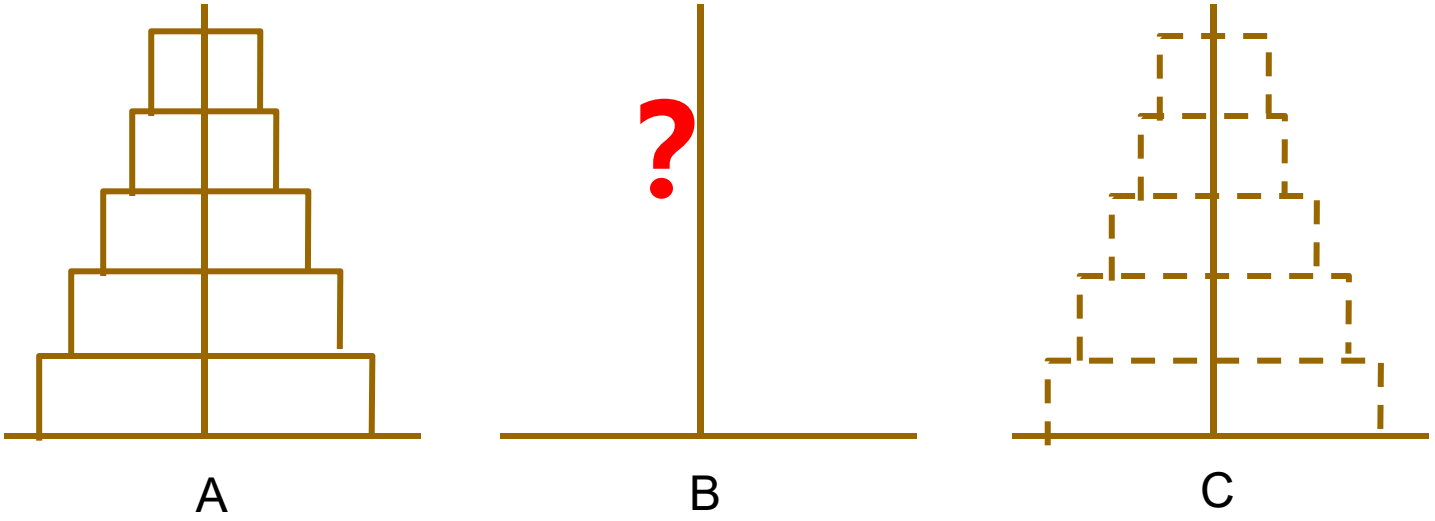
[2749]汉诺塔问题

输入
输入为一个整数(小于20）后面跟三个单字符字符串。
整数为盘子的数目，后三个字符表示三个杆子的编号。
输出
输出每一步移动盘子的记录。一次移动一行。
每次移动的记录为例如 a->3->b 的形式，即把编号为3的盘子从a杆移至b杆。
样例输入
2 a b c
样例输出
a->1->c
a->2->b
c->1->b



分析

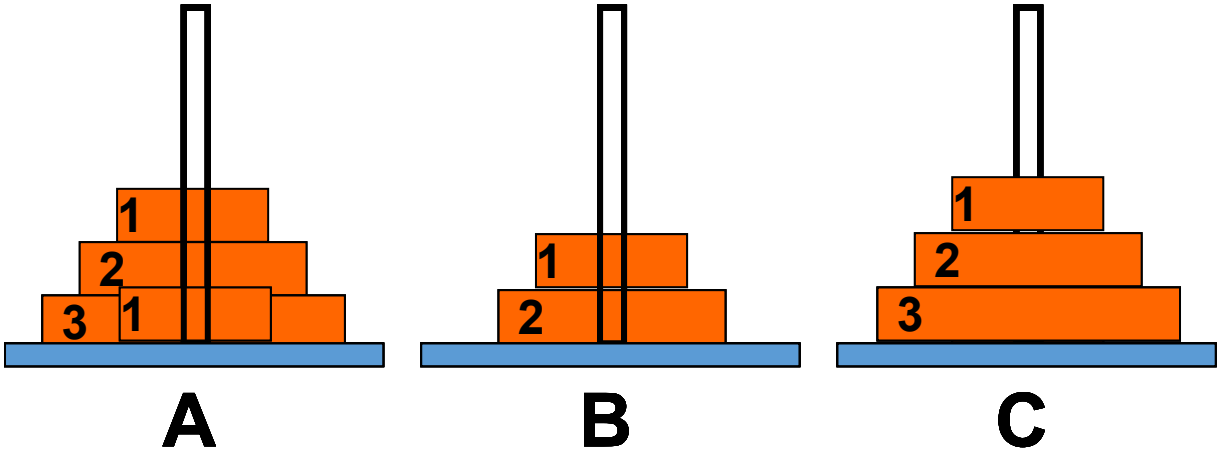
塔内有A，B，C三个柱子。起初，A柱上有n个盘子，依次由大至小、从下往上堆放；**要求把它们全部移到B柱上**，在移动过程中可以利用C柱，但**每次只能移动一个盘子**，且**必须使三个座始终保持大盘在下，小盘在上的状态**。



分析(按A->C)

如果盘子数量很少，通过心算便可以直接想出移动盘子的具体步骤。

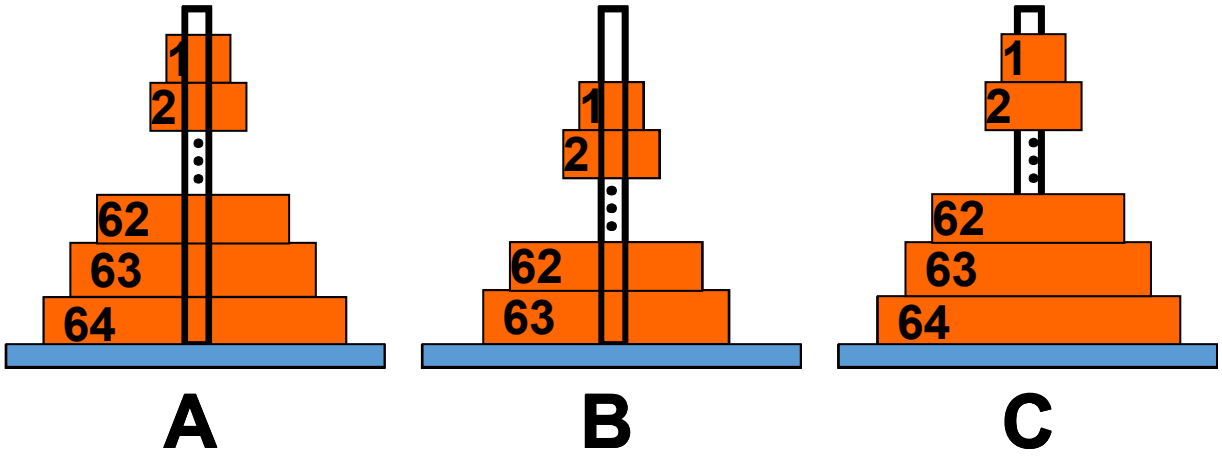
- 比如：只有 2 个盘子的情况，此问题就变得相当的简单，只需要 3 步就可以完成整个移动操作。
  - A—>B（表示将 A柱 最上面的 1 个盘子移到 B柱 上）
  - A—>C（将 A 此时最上面的 1 个盘子移到 C 上）
  - B—>C（将 B 上的盘子移到 C 上）
- 又如：移动 3 个盘子的情况，需要 7 步
  - A—>C
  - A—>B
  - C—>B
  - A—>C
  - B—>A
  - B—>C
  - A—>C



分析

思考： n个盘子至少需要移动多少步？比如n=64。

现在我想不出移完64个盘子的步骤，但如果有另外一个人能想出怎样移完63个盘子，我只要移最后1个盘子就可以了！

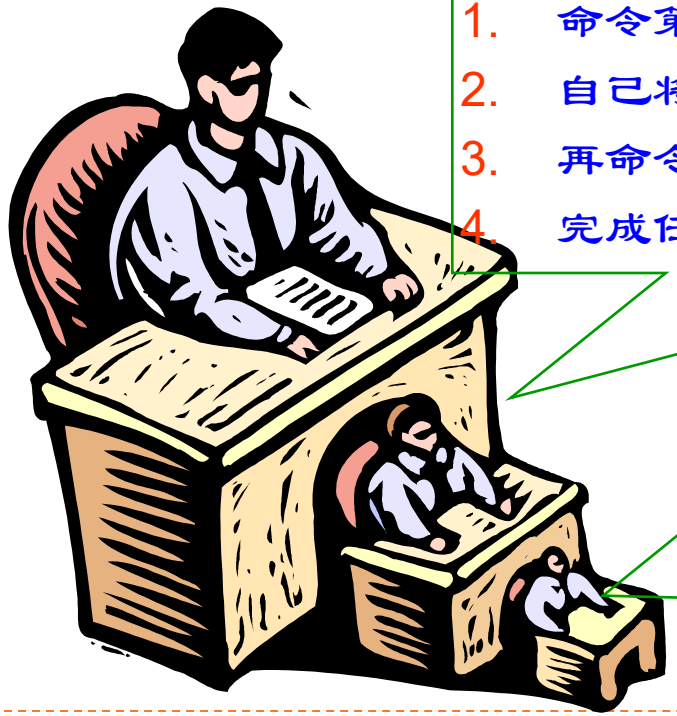


第一个人移动64个盘子(A—>C)的过程：

1. 命令第 2 个人将 63 个盘子从 A 移到B 上；
2. 自己将剩余的最底下最大的那 1 个盘子从 A 移到 C 上；
3. 再命令第 2 个人将 63 个盘子从 B 移到 C 上；
4. 完成任务！

第2个人移动63个盘子(A—>B)的过程：

1. 命令第 3 个人将 62 个盘子从 A 移到C 上；
2. 自己将剩余的最底下最大的那 1 个盘子从 A 移到 B 上；
3. 再命令第 3 个人将 62 个盘子从 C 移到 B 上；
4. 完成任务！



第3个人移动62个盘子(A—>C)的过程：

1. 命令第 4 个人将 61 个盘子从 A 移到B 上；
2. 自己将剩余的最底下最大的那 1 个盘子从 A 移到 C 上；
3. 再命令第 4 个人将 61个盘子从 B 移到 C 上；
4. 完成任务！

……

层层下放！递归调用！

思考：递归的结束条件是什么？

- 递归的结束条件：
  - 最后 1 个人（第 64 个人）只需要移动 1 个盘子。
- 注意：
  - 第 1 个人完成任务的前提是：第 2 个人完成了任务
  - 第 2 个人完成任务的前提是：第 3 个人完成了任务
  - ……
  - 第 63 个人完成任务的前提是：第 64 个人完成了任务
- 所以：
  - 只有当第 64 个人完成任务后，第 63 个人才能完成任务；只有第 2~64 个人完成任务后，第 1 个人才能完成任务！

典型的递归问题！

- 将 n 个盘子从 A 移到 C 可以分解为以下 3 个步骤：
  1) 将 A 上 n-1 个盘子借助 C 先移到 B 上；
  2) 把 A 上剩下的 1 个盘移到 C 上；
  3) 将 n-1 个盘从 B 借助 A 移到 C 上。
- 上面第 1 步和第 3 步，都是把 n-1 个盘子从 1 个座移到另 1 个座上，采用的办法是相同的，只是座的名字不同而已。为使之一般化，可以将第 1 步和第 3 步表示为：
  - 将 one 座上 n-1 个盘子移到 two 座（借助 three 座）。
  - 只是在第 1 步和第 3 步中，one、two、three 和 A、B、C 的对应关系不同。
  - 对第 1 步，对应关系是：one—A，two—B，three—C 。
  - 对第 3 步，对应关系是：one—B，two—C，three—A 。

- 因此，将上面 3 个步骤分为 2 类操作：
  - 将 n-1 个盘子从 1 个座移到另 1 个座上 （当 n>1 时）；
  - 将最后 1 个盘子从 1 个座上移到另 1 个座上 。

★ 设计程序

- 分别用 2 个函数实现以上 2 类操作：
  - 设计 hanoi 函数实现第 1 类操作；
    - 函数 hanoi(n, one, two, three) 将实现把 n 个盘子从 one 座借助 two 座移到 three 座的过程；
  - 设计 move 函数实现第 2 类操作；
    - 函数 move(x, y) 将实现把 1 个盘子从 x 座移到 y 座的过程。x 和 y 是代表 A、B、C 座之一，根据每次不同情况分别以 A、B、C 代入。

```cpp
#include<bits/stdc++.h>
using namespace std;
                    //出发  终点          中间
void hanTa(int n,char one,char two,char three){
    if(n==1)printf("%c->%d->%c\n",one,n,two);
    else{
        hanTa(n-1,one,three,two);
        printf("%c->%d->%c\n",one,n,two);
        hanTa(n-1,three,two,one);
    }

}
int main(){
    int n;
    char a,b,c;
    cin>>n>>a>>b>>c;
    hanTa(n,a,b,c);
    return 0;
}
```

1.2.4[2764] 放苹果

把M个同样的苹果放在N个同样的盘子里，允许有的盘子空着不放，问共有多少种不同的分法？（用K表示）5，1，1和1，5，1 是同一种分法。

输入
第一行是测试数据的数目t（0≤t≤20）。以下每行均包含二个整数M和N，以空格分开。1≤M，N≤10。
输出
对输入的每组数据M和N，用一行输出相应的K。
样例输入
1
7 3
样例输出
8

分析

这个问题的关键是递推函数。

m个苹果放在n个盘子中，那么定义函数为apple(m,n)：
1.m=0，没有苹果，那么只有一种放法，即apple(0,n)=1
2.n=1，只有一个盘中，不论有或者无苹果，那么只有一种放法，apple(m,1)=1
3.n>m，和m个苹果放在m个盘子中是一样的，即apple(m,n)=apple(m,m)
4.m>=n，这时分为两种情况，一是所有盘子都有苹果，二是不是所有盘子都有苹果。不是所有盘子都有苹果和至少有一个盘子空着是一样的，即=apple(m,n-1)。所有盘子都有苹果，也就是至少每个盘子有一个苹果，m个苹果中的n个放在n个盘子中，剩下的m-n个苹果，这和m-n个苹果放在n个盘子中是是一样的，即=apple(m-n, n)。这时，apple(m,n)=apple(m-n, n)+apple(m,n-1)。

```c
#include <stdio.h>
int apple(int m,int n)
{
    if(m == 0 || n == 1)
        return 1;
    else if(n > m)
        return apple(m, m);
    else
        return apple(m - n, n) + apple(m, n - 1);
}

int main(void)
{
    int t, m, n;

    scanf("%d", &t);
    while(t--) {
        scanf("%d%d", &m, &n);
        printf("%d\n", apple(m, n));
    }
    return 0;
}
```

1.2.5[2867] 集合的划分

设S是一个具有n个元素的集合，S＝⟨ a1，a2，……，an⟩ ，现将S划分成k个满足下列条件的子集合S1，S2，……，且满足：

1．Si ≠ ∅

2．Si ∩ Sj ＝ ∅ (1≤i，j≤k i≠j)

3．S1 ∪ S2 ∪ S3 ∪ … ∪ Sk ＝ S

则称S1，S2，……，是集合S的一个划分。它相当于把S集合中的n个元素a1，a2，……，an放入k个(0＜k≤n＜30)无标号的盒子中，使得没有一个盒子为空。请你确定n个元素a1，a2，……，放入k个无标号盒子中去的划分数S(n,k)。

输入

给出n和k。

输出

n个元素a1，a2，……，ana1，a2，……，an 放入k个无标号盒子中去的划分数S(n,k)。

样例输入10 6

样例输出22827

分析

先举个例子，设S＝｛1，2，3，4｝，k＝3，不难得出S有6种不同的划分方案，即划分数S(4，3)=6，具体方案为：

｛1，2｝∪｛3｝∪｛4｝
｛1，3｝∪｛2｝∪｛4｝
｛1，4｝∪｛2｝∪｛3｝
｛2，3｝∪｛1｝∪｛4｝
｛2，4｝∪｛1｝∪｛3｝
｛3，4｝∪｛1｝∪｛2｝

考虑一般情况，对于任意的含有n个元素a1 ，a2，……，an的集合S，放入k个无标号的盒子中去，划分数为S(n，k)，我们很难凭直觉和经验计算划分数和枚举划分的所有方案，必须归纳出问题的本质。

其实对于任一个元素an，则必然出现以下两种情况：

1、 {an} 是k个子集中的一个，于是我们只要把a1，a2，……，an-1 划分为k－1子集，便解决了本题，这种情况下的划分数共有

S(n－1，k－1)个；

2、 {an} 不是k个子集中的一个，则an必与其它的元素构成一个子集。则问题相当于先把a1，a2，……，an-1 划分成k个子集，这种情况下划分数共有S(n－1，k)个；然后再把元素an加入到k个子集中的任一个中去，共有k种加入方式，这样对于an的每一种加入方式，都可以使集合划分为k个子集，因此根据乘法原理，划分数共有

k * S(n－1，k)个。

综合上述两种情况，应用加法原理，得出n个元素的集合｛a1，a2，……，an｝划分为k个子集的划分数为以下递归公式：

S(n，k)＝S(n－1，k－1) + k * S(n－1，k) (n>k，k>0)。

下面，我们来确定S(n，k)的边界条件.

首先不能把n个元素不放进任何一个集合中去，即k=0时，S(n，k)＝0；也不可能在不允许空盒的情况下把n个元素放进多于n的k个集合中去，即k＞n时,S(n，k)＝0；再者，把n个元素放进一个集合或把n个元素放进n个集合，方案数显然都是1，即k=1或k=n时，S(n,k)=1。

因此，我们可以得出划分数S(n，k)的递归关系式为：

S(n，k)＝S(n－1，k－1) ＋ k ＊ S(n－1，k)　　(n>k，k>0)

S(n，k)＝0　　(n<k)或(k＝0)

S(n，k)＝1　　(k=1)或(k＝n)

```cpp
#include<iostream>
using namespace std;

int s(int n, int k)     //数据还有可能越界，请用高精度计算
{
    if ((n < k) || (k == 0)) return 0;  //满足边界条件，退出
    if ((k == 1) || (k == n)) return 1;
    return s(n-1,k-1) + k * s(n-1,k); //调用下一层递归
}
int main()
{
    int n,k;
    cin >> n >> k;
    cout << s(n,k);
    return 0;
}
```

1.2.6[2745]凑数字

有n个数字，a[1],a[2],a[3].....a[n]，以及一个数字m。问n个数字中取出一些数字，这些数字的和能否等于m。

输入
多组测试数据，读入到文件尾结束。
第一行输入n，m。（1<=n<=20, 1<=m<=100）
第二行输入n个数字a[1],a[2],a[3].....a[n]。(1<=a[i]<=100)

输出
如果可以，输出YES，否则输出NO。
样例输入
5 5
1 1 1 1 1
5 5
2 2 2 2 2
样例输出
YES
NO

```c
#include<stdio.h>
#include<string.h>
int n,m,a[20],flag,sum;
void f(int i)
{

    if(i>=n)
        return;
    sum+=a[i];
    if(sum==m)
    {
        flag=1;
        return;
    }
    f(i+1);
    sum-=a[i];
    f(i+1);
}
```

```c
int main()
{
    while(scanf("%d%d",&n,&m)!=EOF)
    {
        memset(a,0,sizeof a);
        int i;
        for(i=0;i<n;i++)
            scanf("%d",&a[i]);
        flag=0,sum=0;
        f(0);
        if(flag)
            printf("YES\n");
        else
            printf("NO\n");
    }
    return 0;
}
```

1.2.7[3804] zb的生日西瓜

今天是阴历七月初五，acm队员zb的生日。zb正在和C小加、never在武汉集训。他想给这两位兄弟买点什么庆祝生日，经过调查，zb发现C小加和never都很喜欢吃西瓜，而且一吃就是一堆的那种，zb立刻下定决心买了一堆西瓜。当他准备把西瓜送给C小加和never的时候，遇到了一个难题，never和C小加不在一块住，只能把西瓜分成两堆给他们，为了对每个人都公平，他想让两堆的重量之差最小。每个西瓜的重量已知，你能帮帮他么？

输入

多组测试数据（<=1500）。数据以EOF结尾

第一行输入西瓜数量N (1 ≤ N ≤ 20)

第二行有N个数，W1, …, Wn (1 ≤ Wi ≤ 100000)分别代表每个西瓜的重量

输出

输出分成两堆后的质量差

样例输入

5 5 8 13 27 14

样例输出

3

```cpp
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <string.h>
using namespace std;
int a[21], v, n, m;
void dfs(int i, int ans)
{
    if (ans>v) return;//超过一半退出
    if (i>n)
    {//判断完毕
        if (m<ans) m = ans;
        return;
    }//对于每个西瓜两种选择，取和不取
    dfs(i+1, ans+a[i]);
    dfs(i+1, ans);
}
```

```cpp
int main()
{
    int sum;
    while (~scanf("%d", &n))
    {
        sum = 0;
        for (int i=1; i<=n; i++)
        {
            scanf("%d", &a[i]);
            sum += a[i];
        }
        v = sum/2;//把一半体积作为边界
        m = 0;
        dfs(1, 0);
        cout<<sum-2*m<<endl;
    }
    return 0;
}
```

递归存在的问题

- 递归思想虽然很好理解，特别是对于一些可以用递推式子表示的问题。然而，**使用递归的代价**是十分巨大的：它会消耗大量的内存！！！
- 函数调用时需要用到堆栈，而堆栈的资源是十分有限的。
- 在例8.3中，使用递归思想求Fibonacci数列的第n项。单独求**Fibonacci(20)**，递归调用Fibonacci( )函数就达到**21891**次！！！

今天的课程结束啦……

下课了…
同学们再见！