树形动态规划

信智学院　陈琰宏

什么是树型动态规划

顾名思义，树形动态规划就是在“树”的数据结构上的动态规划。树形动态规划是建立在树上的，所以也相应的有二个方向：

根—>叶：不过这种动态规划在实际的问题中运用的不多，也没有比较明显的例题，所以不在今天讨论的范围之内。

叶—>根：既根的子节点传递有用的信息给根，完后根得出最优解的过程。这类的习题比较的多，下面就介绍一些这类题目和它们的一般解法。

在树的后序遍历dfs的过程中,先把子节点的最优解 解出 然后来更新全局最优解。然后用父节点继续更新全局最优解,所以是动态规划思想,再加上是运用在树结构中,所以是树形DP。

共性总结

1）顺序：一般按照后序遍历的顺序，即处理完儿子再处理当前节点，这符合树的子结构的性质。

2）实现方式：树形DP是通过记忆化搜索实现的，因此采用的是递归方式。

3）时间复杂度：树形DP复杂度基本上是 O(n) ；若有附加维m，则是O(n*m)。

1［2511］ 树的高度（理解树）

给定一颗树，树中包含 n 个结点（编号 1~ n）和 n-1 条无向边，根节点的编号为1，求这颗树的高度。

输入第一行包含整数 n，表示树的结点数。

接下来 n-1 行，每行包含两个整数 a 和 b，表示点 a 和点 b 之间存在一条边。其中a为父节点，b为孩子节点。

输出一个整数 h，表示这个颗树的高度。

数据范围1≤n≤1000

图的方式建树

```
 7  const int N = 1005; //数据范围是10的5次方
 8  const int M = 2 * N;
 9  int h[N]; //邻接表存储树，有n个节点
10  int e[M]; //存储元素
11  int ne[M]; //存储列表的next值
12  int idx; //单链表指针
13  int n; //题目所给的输入，n个节点
14
15
16  //a所对应的单链表中插入b  a作为父节点
17  void add(int a, int b) {
18      e[idx] = b, ne[idx] = h[a], h[a] = idx++;
19  }
```

```
11  vector<int>g[N];
12  int ans = 0;
13  int dep[N];
14
15  void dfs(int x,int fa){
23
24  void solve(){
25      cin>>n;
26      for(int i=1;i<=n;i++){
27          dep[i] = 1;
28      }
29      for(int i=1;i<n;i++){
30          int x,y;cin>>x>>y;
31          g[x].push_back(y);
32          g[y].push_back(x);
33      }
```

搜索过程

```
21 int dfs(int u) {
22     int ans=0;
23     for (int i = h[u]; i != -1; i = ne[i]) {
24         int j = e[i];//遍历链表
25         int gao=dfs(e[i]);//求前点的高度
26         ans=max(ans,gao);
27     }
28    // cout<<u<<"的高度为"<<ans+1<<"\n";
29     return ans+1;
30 }
```

```
32 int main() {
33     memset(h, -1, sizeof h); //初始化h数组 -1表示尾节点
34     cin >> n; //表示树的结点数
35     for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
36         int a, b;cin >> a >> b;
37         add(a, b);
38     }
39     cout << dfs(1) << endl;
40     return 0;
41 }
```

2［6375］ 树的重心（理解树）

给定一颗树，树中包含 n 个结点（编号 1~ n）和 n-1 条无向边。

请你找到树的重心，并输出将重心删除后，剩余各个连通块中点数的最大值。

重心定义：重心是指树中的一个结点，如果将这个点删除后，剩余各个连通块中点数的最大值最小，那么这个节点被称为树的重心。

第一行包含整数 n，表示树的结点数。接下来 n-1 行，每行包含两个整数 a 和 b，表示点 a 和点 b 之间存在一条边。

输出一个整数 m，表示将重心删除后，剩余各个连通块中点数的最大值。

[6375] 树的重心

输入

9

1 2

1 7

1 4

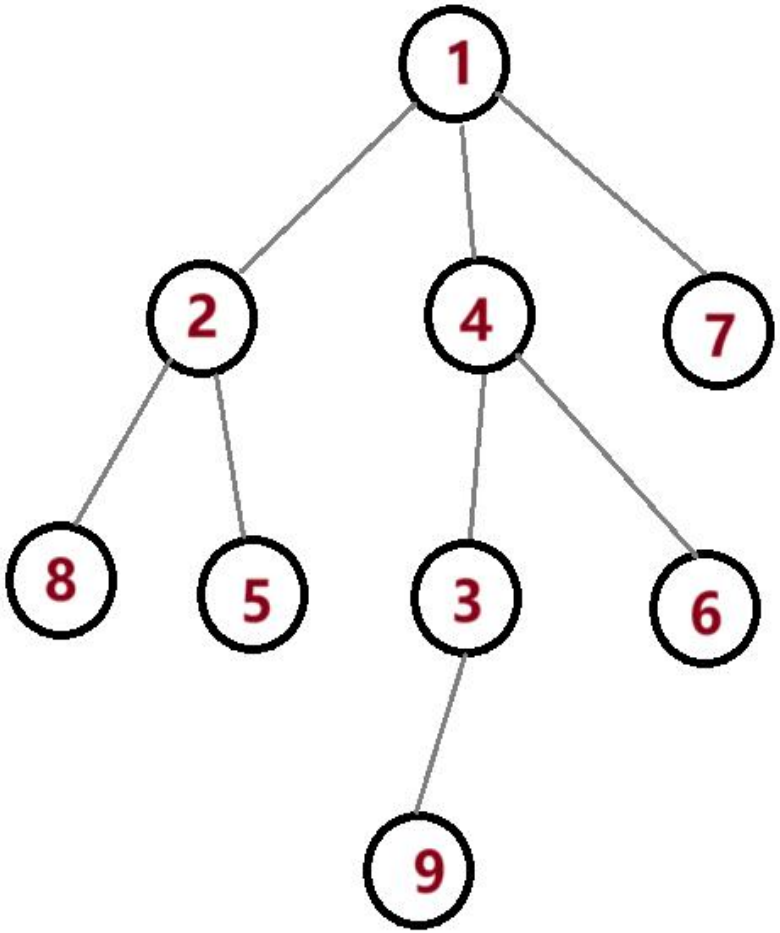
2 8

2 5

4 3

3 9

4 6



输出

4

分析

重心定义：重心是指树中的一个结点，如果将这个点删除后，剩余各个连通块中点数的最大值最小，那么这个节点被称为树的重心。

枚举每一个点，求解以该点为根（重心）的所有子树的节点个数即可。本题的本质是树的dfs， 每次dfs可以确定以u为重心的最大连通块的节点数，并且更新一下ans。

代码1：

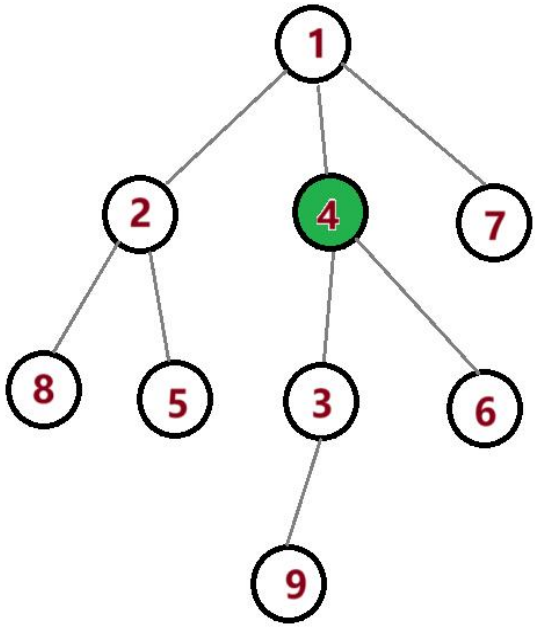
```
48  int main() {
49      memset(h, -1, sizeof h); //初始化h数组 -1表示尾节点
50      cin >> n; //表示树的结点数
51
52      // 树中是不存在环的，对于有n个节点的树，必定是n-1条边
53      for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
54          int a, b;
55          cin >> a >> b;
56          add(a, b), add(b, a); //无向图
57      }
58
59      dfs(1); //可以任意选定一个节点开始 u<=n
60
61      cout << ans << endl;
62      return 0;
63  }
```

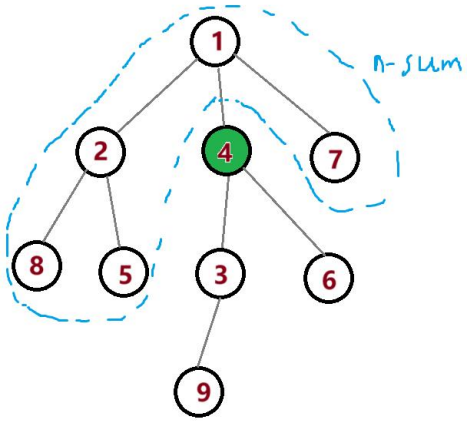
代码:2:

```
7  const int N = 1e5 + 10; //数据范围是10的5次方
8  const int M = 2 * N; //以有向图的格式存储无向图，所以每个节点至多对应2n-2条边
9
10 int h[N]; //邻接表存储树，有n个节点，所以需要n个队列头节点
11 int e[M]; //存储元素
12 int ne[M]; //存储列表的next值
13 int idx; //单链表指针
14 int n; //题目所给的输入，n个节点
15 int ans = N; //表示重心的所有的子树中，最大的子树的结点数目
16
17 bool st[N]; //记录节点是否被访问过，访问过则标记为true
18
19 //a所对应的单链表中插入b  a作为根
20 void add(int a, int b) {
21     e[idx] = b, ne[idx] = h[a], h[a] = idx++;
22 }
```

代码3：

```
25  //返回以u为根的子树中节点的个数，包括u节点
26  int dfs(int u) {
27      int res = 0; //存储 删掉某个节点之后，最大的连通子图节点数
28      st[u] = true; //标记访问过u节点
29      int sum = 1; //存储 以u为根的树 的节点数，包括u，如图中的4号节点
30
31      //访问u的每个子节点
32      for (int i = h[u]; i != -1; i = ne[i]) {
33          int j = e[i];
34          //因为每个节点的编号都是不一样的，所以 用编号为下标 来标记是否被访
35          if (!st[j]) {
36              int s = dfs(j);  // u节点的单棵子树节点数 如图中的size值
37              res = max(res, s); // 记录最大联通子图的节点数
38              sum += s; //以j为根的树 的节点数
39          }
40      }
41      //n-sum 如图中的n-size值，不包括根节点4;
42      res = max(res, n - sum); // 选择u节点为重心，最大的 连通子图节点数
43      ans = min(res, ans); //遍历过的假设重心中，最小的最大联通子图的 节点数
44      return sum;
45  }
```





3［7279］树的最长路径(直径)

给定一棵树，树中包含 n 个结点（ 编号 1- n 和 n-1 条无向边，每条边都有一个权值。现在请你找到树中的一条最长路径。

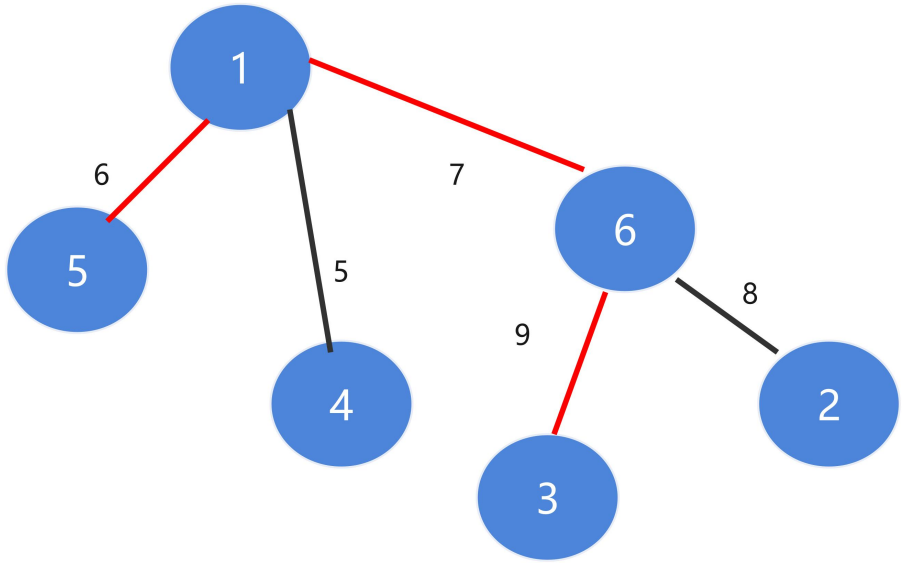
换句话说，要找到一条路径，使得使得路径两端的点的距离最远。注意：路径中可以只包含一个点。

第一行包含整数 n。接下来 n-1 行，每行包含三个整数 ai,bi,ci，表示点 ai 和 bi 之间存在一条权值为 ci 的边。

输出一个整数，表示树的最长路径的长度。1≤n≤10000

[7279] 树的最长路径(直径)

6
5 1 6
1 4 5
6 3 9
2 6 8
6 1 7



22

[7279] 树的最长路径(直径)

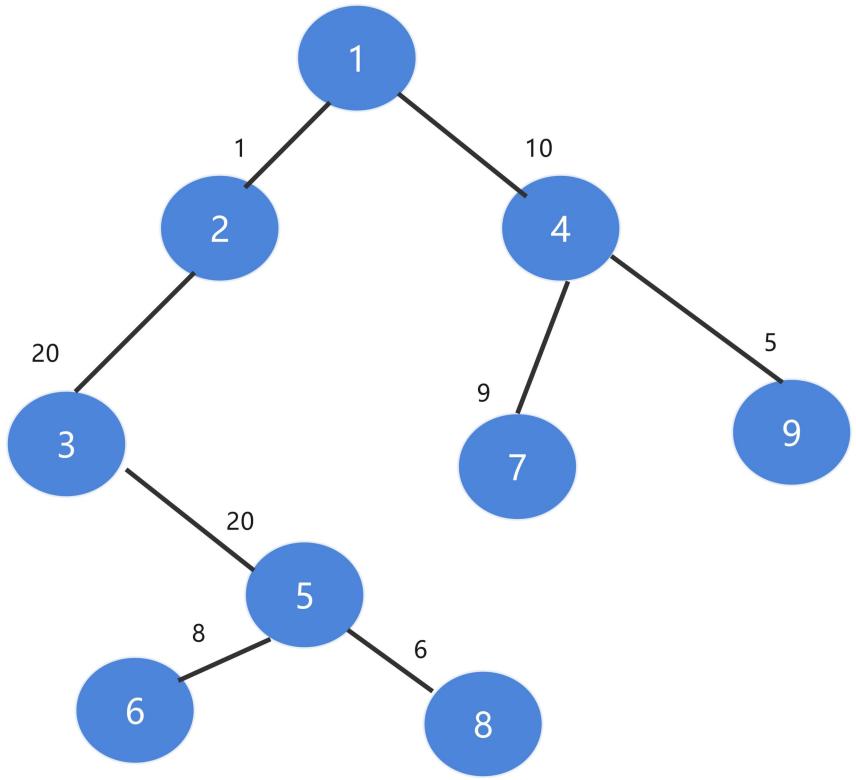
我们知道：树上 任意两点 的路径是 唯一 确定的，因此我们可以暴力枚举 起点 和 终点 找出最长路径
如果这样做的话，我们来思考一下时间复杂度：
枚举 起点 和 终点 — $O(n^2)$，找出两点之间的路径长度 — $O(\log n)$
　　但是光是枚举 起点 和 终点，时间复杂度 就直接拉满了，显然这种做法 不可取

既然这 $O(n^2)$ 条路径不能 一一枚举，那么有什么方式可以把他们 分类枚举 呢？

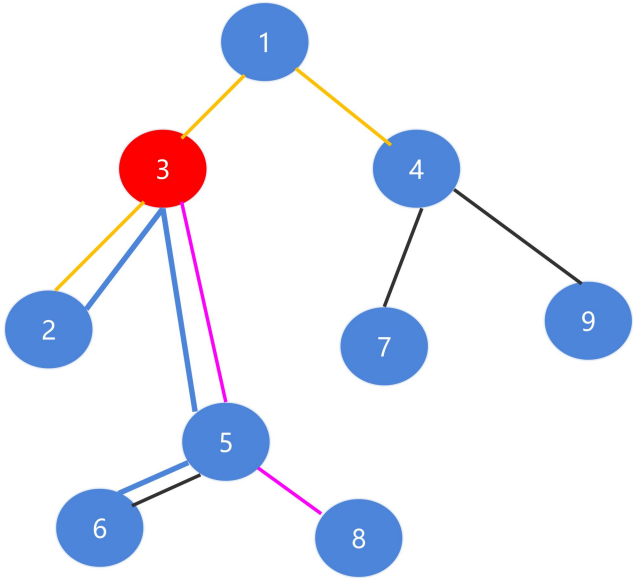
方法1：两次dfs求解

找树的直径。
参考 [lq2013]9223 大臣的旅费

1. 任取一点作为起点，找到距离该点最远的一个点u。
2. 再找到距离u最远的一点v。那么u和v之间的路径就是一条直径。



方法2：树形DP求解



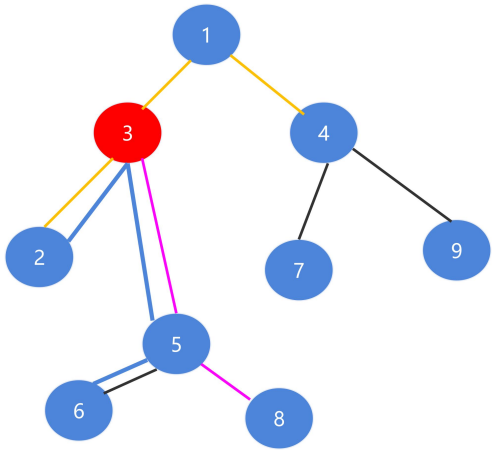
观察标红的节点，那么经过他的路径有：

- 以其子树中的某个节点作为起点，以他作为终点 的粉色路径
- 以其子树中的某个节点 作为 起点，以子树中的某个节点 作为 终点 的 蓝色路径
- 以其子树中的某个节点 作为 起点，以非其子树的节点 作为 终点的橙色路径

对于第 1 种情况，我们可以直接递归处理其子树，找出到当前子树根节点最长的路径长度即可

对于第 2 种情况，我们在处理第 1 种情况时，顺便找出 1 类路径的次长路径把 最长 和 次长 拼在一起，就是我们要的第 2 种情况

分析



而对于第 3 种情况，我们可以把它归类为其 祖先节点 的第 1,2种情况，让其 祖先节点 去处理即可

状态表示—集合$f_{1/2,i}$：以节点 i 为根的子树中，从子树某个节点到 i 的最长路为 $f_{1,i}$，次长路为 $f_{2,i}$

状态表示—属性$f_{1/2,i}$：路径长度的最大值 Max

状态计算—$f_{1/2,i}$

$$\begin{cases} f_{1,i} = max(f_{1,i_c1} + w_{i,i_{c1}}) & c1 \in i_{child} \\ f_{2,i} = max(f_{1,i_c2} + w_{i,i_{c2}}) & c2 \in i_{child} \ \& \ c2 \neq c1 \ \& \ f_{2,i} \leq f_{1,i} \end{cases}$$

写法1：

```
5  //初始不确定树的拓扑结构，因此要建立双向边
6  const int N = 1e4 + 10, M = N << 1;
7
8  int n;
9  int h[N], e[M], w[M], ne[M], idx;
10 int f1[N], f2[N], res;
11
12 void add(int a, int b, int c)
13 {
14     e[idx] = b, w[idx] = c;
15     ne[idx] = h[a], h[a] = idx ++ ;
16 }
```

```
36 int main()
37 {
38     memset(h, -1, sizeof h);
39     scanf("%d", &n);
40     for (int i = 0; i < n - 1; i ++ )
41     {
42         int a, b, c;
43         scanf("%d%d%d", &a, &b, &c);
44         add(a, b, c), add(b, a, c);
45     }
46     //我们可以任意选取一个点作为根节点
47     //这样整棵树的拓扑结构被唯一确定下来了
48     dfs(1, -1);
49     printf("%d\n", res);
50     return 0;
51 }
```

写法1：

```
19 //father表示u的父节点,因为该图为无向图,
20 //并且迭代过程中不能回到父节点,所以要特殊标记.
21 void dfs(int u, int father)
22 {
23     f1[u] = f2[u] = 0;
24     for (int i = h[u]; ~i; i = ne[i])
25     {
26         int j = e[i];
27         if (j == father) continue;
28         dfs(j, u);
29         if (f1[j] + w[i] >= f1[u])  //最长路转移
30             f2[u] = f1[u] ,f1[u] = f1[j] + w[i];
31         else if (f1[j] + w[i] > f2[u]) //次长路转移
32             f2[u] = f1[j] + w[i];
33     }
34     res = max(res, f1[u] + f2[u]);
35 }
```

写法2：

```cpp
#include <bits/stdc++.h>
using namespace std;
const int N =1e4+5;
struct node{
    int x,w;
};
vector<node>g[N];

int n;
int ans=0;

int dfs(int x,int fa){

}
int main(){
    cin>>n;
    for(int i=1;i<n;i++){
        int x,y,w;cin>>x>>y>>w;
        g[x].push_back({y,w});
        g[y].push_back({x,w});
    }

    dfs(1,-1);

    cout<<ans;
    return 0;
}
```

写法2：

```
12 int dfs(int x,int fa){
13     int dis=0;
14     int d1=0,d2=0;
15     for(const auto &[y,w]:g[x]){
16         if(y==fa)continue;
17         int d=dfs(y,x)+w;
18         dis=max(dis,d);
19         if(d>=d1)d2=d1,d1=d;
20         else if(d>d2)d2=d;
21     }
22     ans=max(ans,d1+d2);
23     return dis;
24 }
```

写法3：

```
 7  const int N=10010;
 8
 9  int h[N],w[2*N],ne[2*N],e[2*N],idx;
10  int ans;
11
12  void add(int a,int b,int c)
13  {
14      w[idx]=c,e[idx]=b,ne[idx]=h[a],h[a]=idx++;
15  }
16
```

```
38  int main()
39  {
40      memset(h,-1,sizeof(h));
41      int n;scanf("%d",&n);
42      for(int i=1;i<n;i++)//n-1条边
43      {
44          int a,b,w;
45          scanf("%d%d%d",&a,&b,&w);
46          add(a,b,w),add(b,a,w);
47      }
48      dfs(1,-1);
49      printf("%d",ans);
50  }
```

写法3：

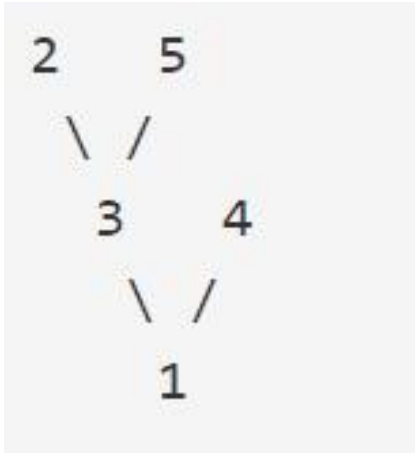
```
17 //father表示u的父节点,因为该图为无向图,
18 //并且迭代过程中不能回到父节点,所以要特殊标记.
19 int dfs(int u,int father)
20 {
21     int d1=0,d2=0;//因为题目描述中有:注意:路径中可以只包含一个点
22     //所以题目中的结果一定不为负数,负的路径由此可以忽略掉
23     for(int i=h[u];i!=-1;i=ne[i])
24     {
25         int j=e[i];
26         if(j==father) continue;
27         int d=dfs(j,u)+w[i];//求出路径的长度
28         //d1,d2求出以该点为顶点的最长路径
29         if(d>=d1) d2=d1,d1=d;//最长路径和次长路径
30         else if(d>d2) d2=d;
31     }
32     ans=max(ans,d1+d2);
33     return d1;//返回当前点的f[x];
34 }
```

4［3707］二叉苹果树

有一棵苹果树，如果树枝有分叉，一定是分2叉（就是说没有只有1个儿子的结点）这棵树共有N个结点（叶子点或者树枝分叉点），编号为1-N,**树根编号一定是1**。我们用一根树枝两端连接的结点的编号来描述一根树枝的位置。

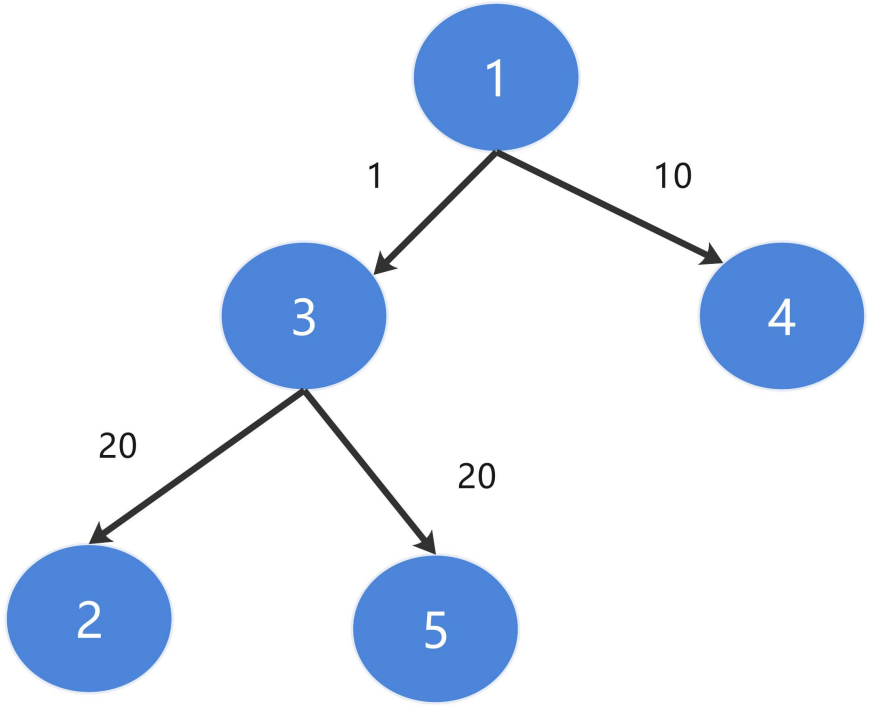
下面是一颗有4个树枝的树现在这颗树枝条太多了，需要剪枝。但是一些树枝上长有苹果。给定需要保留的树枝数量，求出最多能留住多少苹果。

输入第1行2个数，N和Q(1<=Q<= N,1<N<=100)。
N表示树的结点数，**Q表示要保留的树枝数量**。
接下来N-1行描述树枝的信息。
每行3个整数，前两个是它连接的结点的编号。
第3个数是这根树枝上苹果的数量。
每根树枝上的苹果不超过30000个。



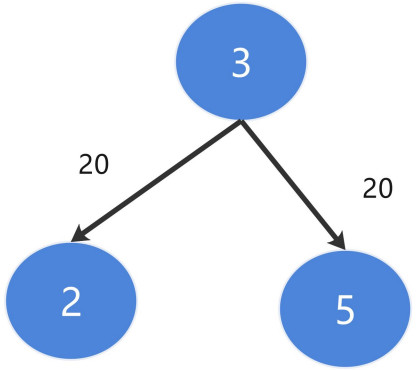
4［3707］二叉苹果树

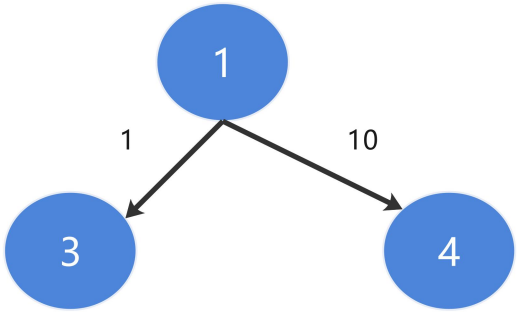
输出
一个数，最多能留住的苹果的数量。
样例输入
5 2
1 3 1
1 4 10
2 3 20
3 5 20
样例输出
21

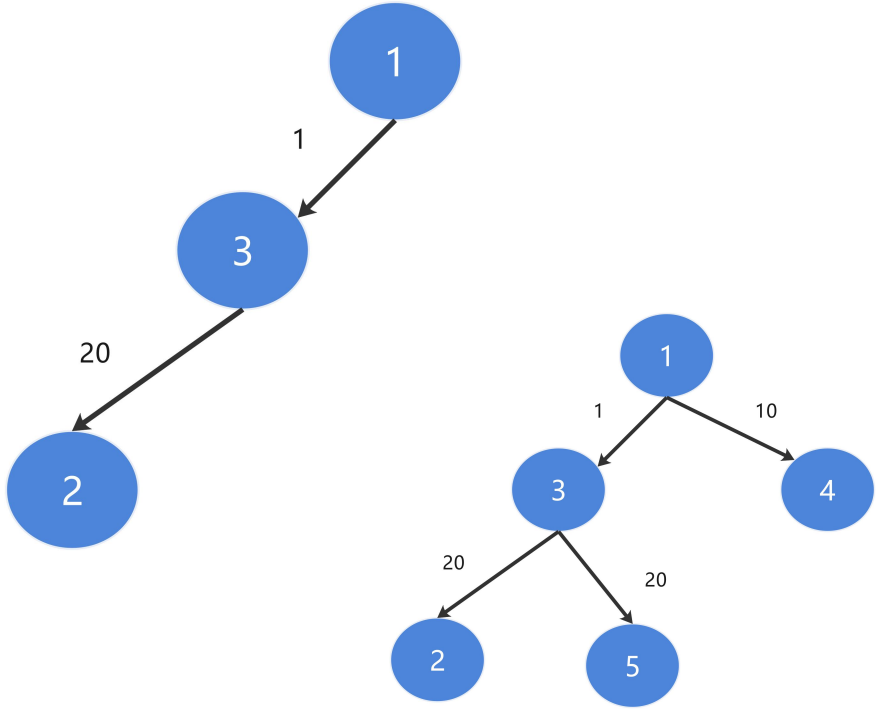


分析

先分析样例数据。根据题意可以把样例数据画成如下二叉树。4条边选两条，很明显，20+20=40是最大的，但是按照题目要求，我们在选择时必须从根节点开始，不然树不成树。 所以只能选择：



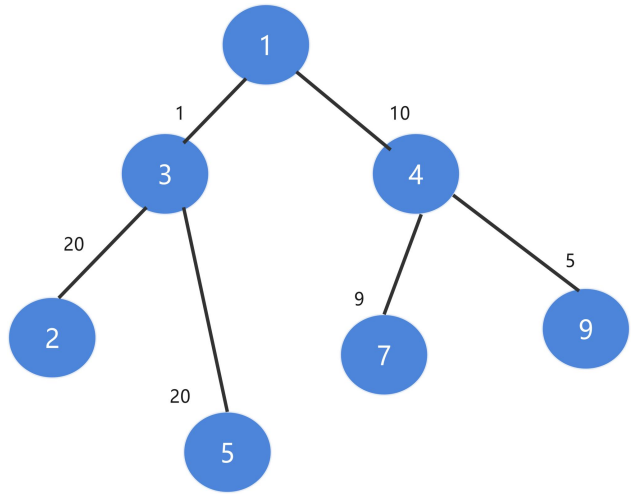




分析:树形DP、树上背包

对于每条边，都有选或不选 两种请看看，这就是树上的01背包问题。

设f[u][j] 表示以u为根，选择j条边 能留住的最大苹果树。



状态转移:

$$f[u][j]=max(f[u][j],f[u][j-k-1]+f[v][k]+e[i].w)$$

e[i].w 为 uv的边长　$j\in[m,1],k\in[0,j-1]$

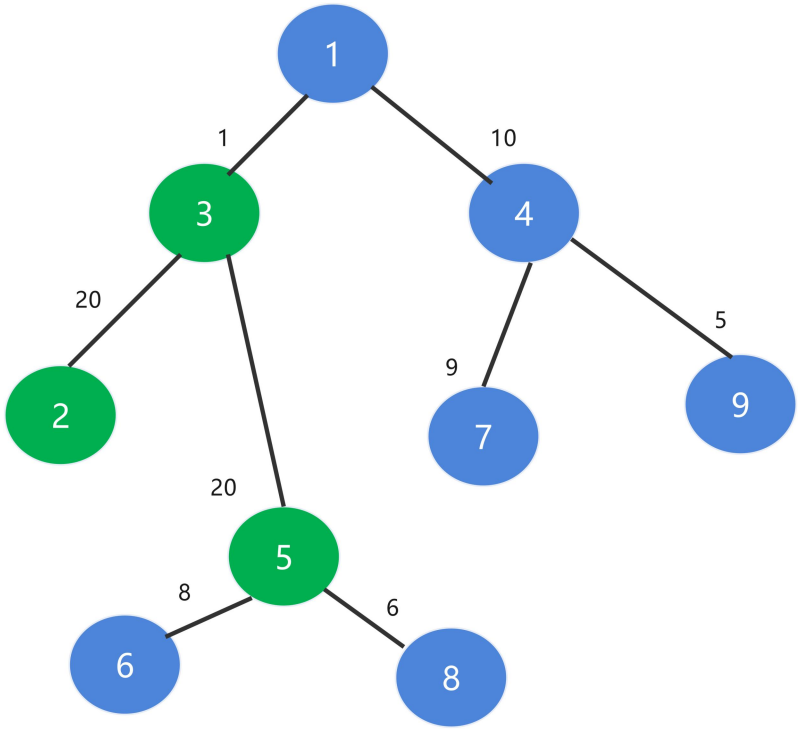
v子树中选k条边，已遍历的u子树中选j-k-1条边，(u,v)这条边权是必选的（就是e[i]），这就得到当前u子树选j条边的状态。注意:

1. j要逆序枚举，这保证每条边最多选一次。

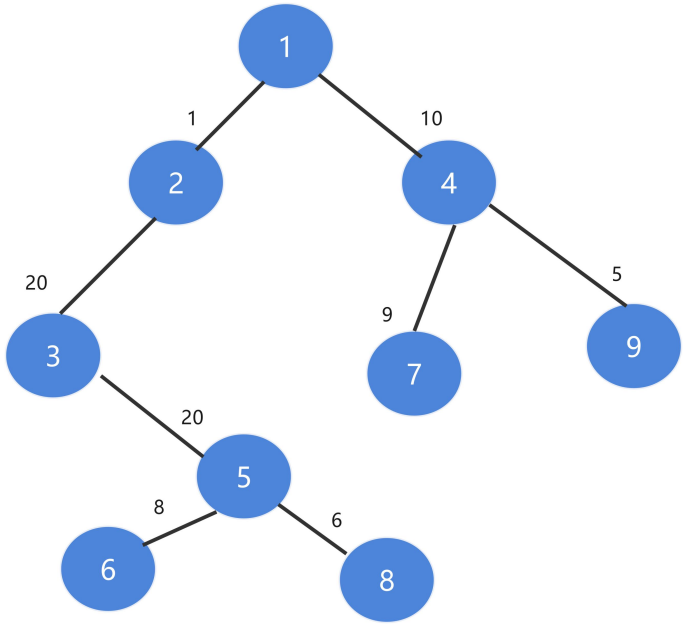
2. 为保证时间复杂度O(n*m),用siz[u]记录当前u子树的边数，枚举j,k时收缩一下范围。

分析:树形DP、树上背包

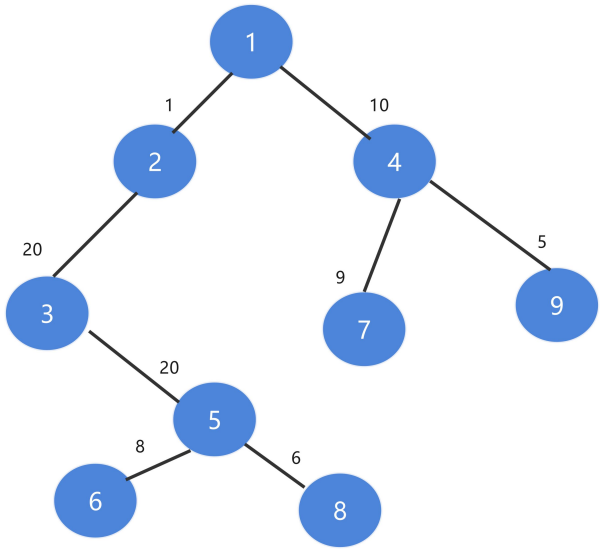
```
9  4
1  3  1
1  4  10
2  3  20
3  5  20
4  7  9
4  9  5
5  6  8
5  8  6
```

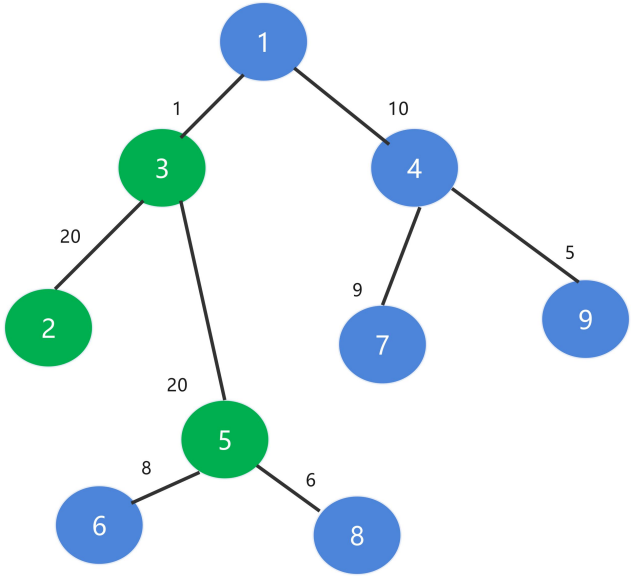


如f[5][1]=8,即就选了边56
f[5][2]的最大值为14:
f[3][3]的最大值为48

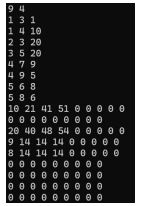


分析





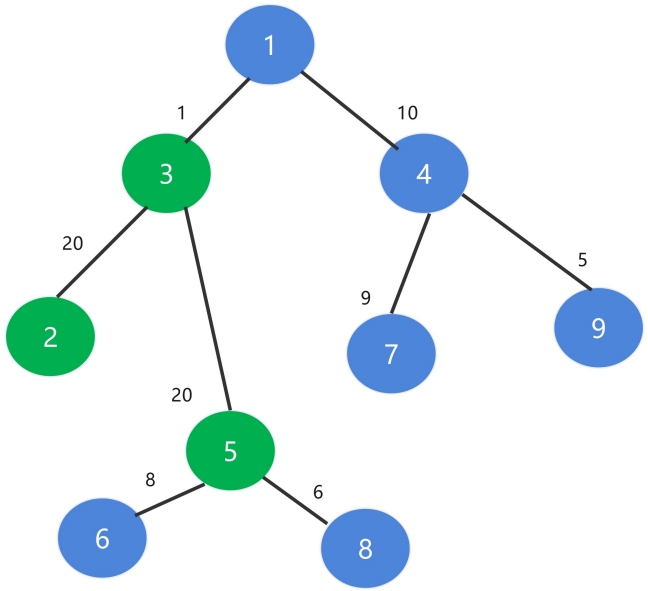
j i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	21	41	51	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	20	40	48	54	0	0	0	0	0
4	9	14	14	14	0	0	0	0	0
5	8	14	14	14	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

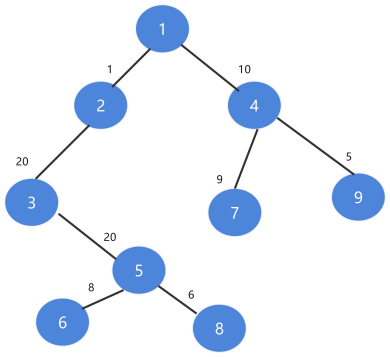


分析：以1为根选3个点

```
f[1][3]=max(f[3][2]+f[1][0],
            f[3][1]+f[1][1],
            f[3][0]+f[1][2])+w[i]
```

=41

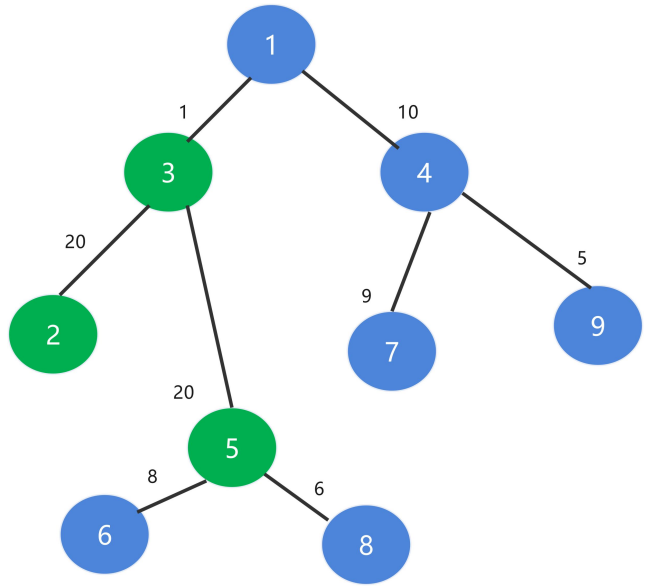




j / i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	10	21	**41**	51	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	20	40	48	54	0	0	0	0	0
4	9	14	14	14	0	0	0	0	0
5	8	14	14	14	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0

状态转移方程：

```
for(int j=m;j>=1;j--)
    for(int k=j-1;k>=0;k--)
      f[u][j] = max(f[u][j],f[左孩子][k]+f[右孩子][j-k-1]+e[i].w )
       //u表示当前根节点； j 表示以u为根，取多少条边
         e[i].w 为 uv的边长
```



如何建树

```
52  int main()
53  {
54      memset(h, -1, sizeof h);
55      cin >> n >> m;
56      for(int i = 0;i < n - 1;i ++){
57          int a,b,c;
58          cin >> a >> b >> c;
59          add(a,b,c), add(b,a,c);
60      }
61      //题目给了树根节点一定为1,所以直接dfs(1,-1)就行
62      dfs(1,-1);
63      cout << dp[1][m] << endl;
64      return 0;
```

```
 4  const int N = 110,M = N * 2;
 5
 6  int h[N], e[M], ne[M], w[M], idx;
 7  int dp[N][N];
 8  // dp[i][j]:表示考虑到 以第i个节点为根节点的树中
 9  //选取最大枝干 最多选j个树枝 的所有方案,中的最大苹果数
10  int n,m;
11
12  void add(int a, int b, int c)  // 添加一条边a->b,边权为c
13  {
14      e[idx] = b, w[idx] = c, ne[idx] = h[a], h[a] = idx ++ ;
15  }
16
```

dp过程

```
17 void dfs(int u,int father){
18     for(int i = h[u];i != -1;i = ne[i]){
19         int son = e[i];
20         if(son == father) continue; //防止走回去父节点,形成环超时
21         dfs(son,u);//用子节点更新全局最优解
22 
23         for(int j = m;j >= 0;j --){
24             for(int k = 0;k <= j - 1;k ++){
25                 dp[u][j] = max(dp[u][j], dp[u][j - k - 1] + dp[son][k] + w[i]);
26             }
27         }
28     }
29 }
```

5［3714］没有上司的晚会

Ural周立大学的校长正在筹备学校的80周年纪念聚会。由于学校的职员有不同的职务级别，可以构成一棵以校长为根的人事关系树。每个职员都有一个唯一的整数编号（范围在1到N之间），并且对应一个参加聚会所获得的欢乐度。为了使每个参加聚会者都感到欢乐，校长想设法使每个职员和他（她）的直接上司不会同时参加聚会。

你的任务是设计一份参加聚会者的名单，使总的欢乐度最高。

输入的第一行是一个整数N，1<= N <= 6000 以下的N行是对应的N个职员的欢乐度（欢乐度是一个从-128到127之间的整数） 。接着是学校的人事关系树，树的每一行格式如下：

〈 L 〉〈 K 〉

表示第K个职员是第L个职员的直接上司。

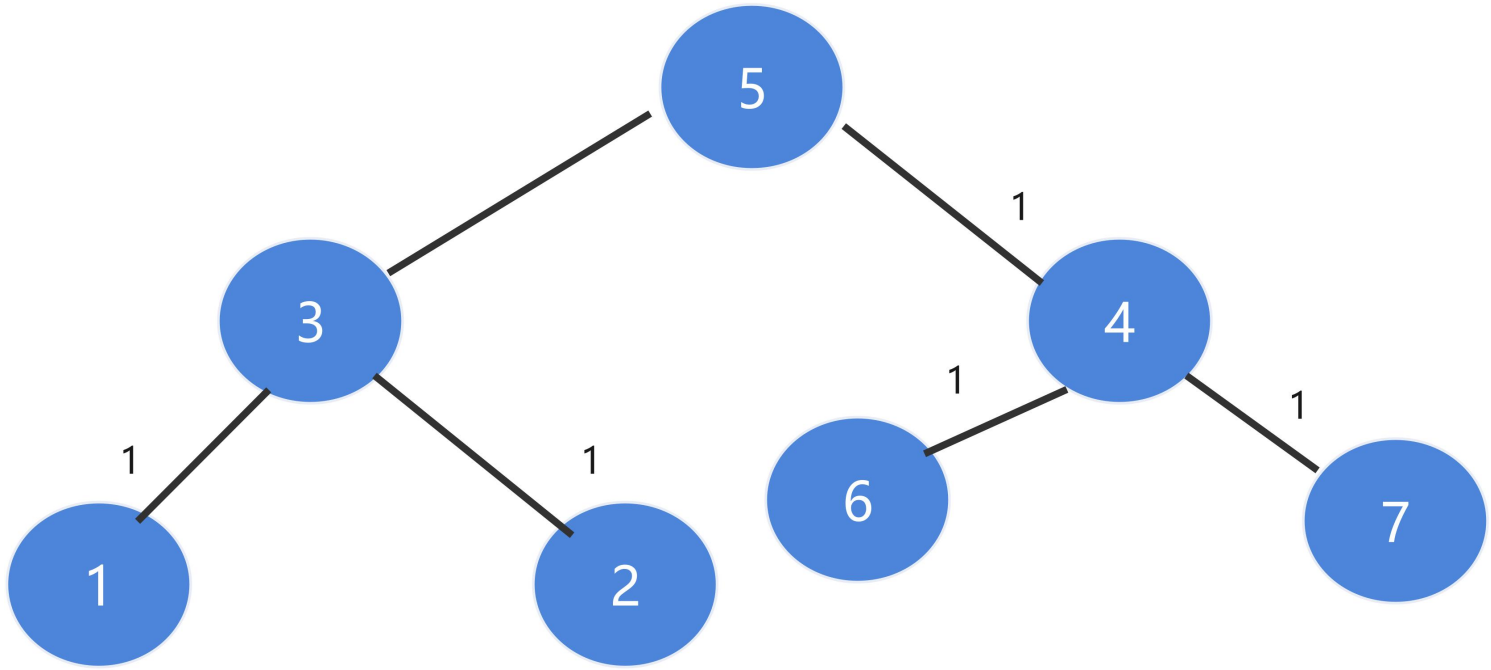
输入以0 0表示结束

输出参加聚会者获得的最大总欢乐度

[3714] 没有上司的晚会

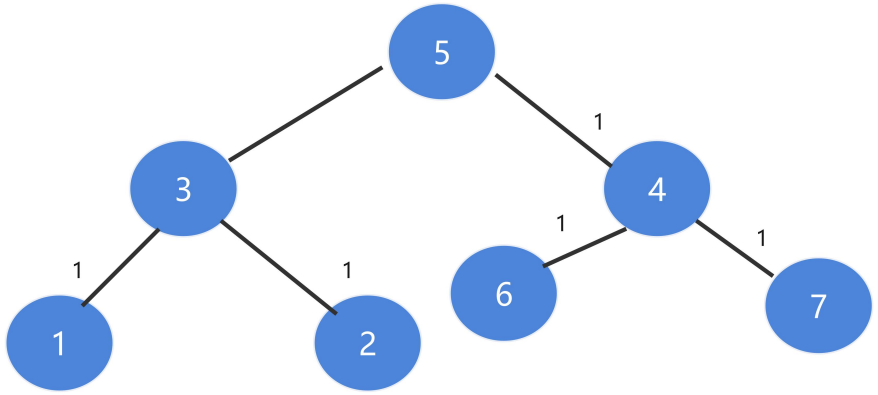
```
7
1
1
1
1
1
1
1
1
1 3
2 3
6 4
7 4
4 5
3 5
0 0


5
```



分析

较为明显的dp题目，满足在某种情况下，求最优值的问题。对于每个点而言，有“选” 和 “不选”两种状态，



则设

f[u][0]：为第u个人不来，他的下属所能获得的最大快乐值；（下属可来可不来）

- $f[u][0] = \sum max(f[s_i, 0], f[s_i, 1])$

f[u][1]：为第u个人来，他的下属所能获得的最大快乐值。（下属不能来）

- $f[u][1] = \sum(f[s_i, 0])$

主函数：

```
24 int main(){
25     scanf("%d",&n);
26     for(int i = 1;i <= n;i ++)
27         scanf("%d",&happy[i]); //输入每个人的高兴度
28     memset(h,-1,sizeof h); //把h都赋值为-1
29     for(int i = 1;i < n;i ++){
30         int a,b; //对应题目中的L,K,表示b是a的上司
31         scanf("%d%d",&a,&b); //输入~
32         has_father[a] = true; //说明a他有上司
33         add(b,a); //把a加入到b的后面
34     }
35     int root = 1; //用来找根节点
36     while(has_father[root]) root ++; //找根节点
37     dfs(root); //从根节点开始搜索
38     printf("%d\n",max(f[root][0],f[root][1]));
39         //输出不选根节点与选根节点的最大值
```

建树：

```
 5  const int N = 6010;
 6  int n;
 7  int happy[N]; //每个职工的高兴度
 8  int f[N][2];
 9  int e[N],ne[N],h[N],idx; //链表，用来模拟建一个树
10  bool has_father[N]; //判断当前节点是否有父节点
11  void add(int a,int b){ //把a插入树中
12      e[idx] = b,ne[idx] = h[a],h[a] = idx ++;
13  }
```

dp过程：

```
15  void dfs(int u){ //开始求解题目
16      f[u][1] = happy[u];
17          //如果选当前节点u，就可以把f[u,1]先怼上他的高兴度
18      for(int i = h[u];~i;i = ne[i]){ //遍历树
19          int j = e[i];
20          dfs(j); //回溯
21          //状态转移部分
22          f[u][0] += max(f[j][1],f[j][0]);
23          f[u][1] += f[j][0];
24      }
25  }
```

[3709] 数字转换

如果一个数x的约数和（不包括它本身，下同）比它本身小，那么x可以变成它的约数和；如果对于某个y>x且y的约数和为x，那么x也可以变成y。例如，4可以变为3，1可以变为7。限定所有的数字变换在不超过n的正整数范围内进行，求不断进行数字变换且没有重复数字出现的最多变换步数。

输入一个正整数n。输出不断进行数字变换且没有重复数字出现的最多变换步数。

分析：

由于任意正整数 x，的 **约数之和** 是 **唯一的**，且本题要求只有约数之和 **小于** 自身才能转换

故对于所有的 x 来说，他向 **小于** 自己的数转换的边 **至多** 只有一条，那就是 x 的 **约数之和** $x'(x' < x)$

这样一个图论模型我们就很熟悉了，我们把每一个 **数** 看作一个 **点**，把上述这个 **转换** 看作该点的 **入边**

每一个 **点**，**至多只有一条** 入边，这就是 **森林** 呀

建好图后，本题就 **等价于** 找出一个森林中，**直径最长** 的树，并求出该树的 **直径**

分析：

求解N以内的所以因子的和的时间复杂度为N*sqrt(N),
当 n 很大时，可以考虑用 “筛选”的方式：

```
for (int i = 1; i <= n; i ++ )
        for (int j = 2; j <= n / i; j ++ )
            sum[i * j] += i;
```

sum[k] 存的是k的所有因子和，时间复杂度为 nlogn

代码1：

```
7   const int N = 5e4 + 10;
8   int h[N], e[N], ne[N], idx;
9   int st[N], d[N], res;
10  int n, sum[N];
11
12  void add(int a, int b)
13  {
14      e[idx] = b, ne[idx] = h[a], h[a] = idx ++ ;
15  }
16
17  void build()
18  {
19      for (int i = 1; i <= n; i ++ )
20          for (int j = 2; j <= n / i; j ++ )
21              sum[i * j] += i;//求解因子和
22
23      memset(h, -1, sizeof h);//把所有小于n的值建图
24      for (int i = 2; i <= n; i ++ )
25          if (i > sum[i]) add(sum[i], i);
26  }
```

```
42  int main()
43  {
44      scanf("%d", &n);
45      build();//建图
46      //可能存在多棵树，所以要枚举每一个点
47      for (int i = 1; i <= n; i ++ )
48          if (!st[i]) dfs(i);
49      printf("%d\n", res);
50
51      return 0;
52  }
```

代码2：

```
28  void dfs(int x)
29  {//求解最长直径
30      st[x] = 1;
31      for (int i = h[x]; ~i; i = ne[i])
32      {
33          int y = e[i];
34          if (st[y]) continue ;
35          dfs(y);
36          res = max(res, d[x] + d[y] + 1);
37          d[x] = max(d[x], d[y] + 1);
38      }
39      res = max(res, d[x]);
40  }
```

[3710] 战略游戏

Bob喜欢玩电脑游戏，特别是战略游戏。但是他经常无法找到快速玩过游戏的办法。现在他有个问题。

他要建立一个古城堡，城堡中的路形成一棵树。他要在这棵树的结点上放置最少数目的士兵，使得这些士兵能了望到所有的路。

注意，某个士兵在一个结点上时，与该结点相连的所有边将都可以被嘹望到。

请你编一程序，给定一树，帮Bob计算出他需要放置最少的士兵.

输入第一行 N，表示树中结点的数目。第二行至第N+1行，每行描述每个结点信息，依次为：该结点标号i，k(后面有k条边与结点i相连)。接下来k个数，分别是每条边的另一个结点标号r1，r2，...，rk。对于一个n(0<n<=1500)个结点的树，结点标号在0到n-1之间，在输入数据中每条边只出现一次。输出文件仅包含一个数，为所求的最少的士兵数目

题意：

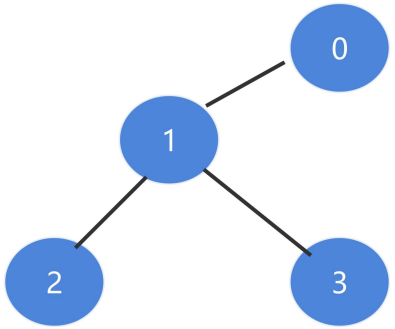
4
0 1 1
1 2 2 3
2 0
3 0
//该结点标号i，k(后面有k条边与结点i相连)

给定一棵包含 n 个结点的 **树**，以及 **树** 上的 $n-1$ 条边

我们需要在这 n 个结点中，选择一定数量的结点放上 **哨兵**

最终要求，树中任意 $n-1$ 条边的左右两端，至少有一个结点上放置了 **哨兵**

求解一个 **方案**，该方案满足上述要求，且放置的哨兵数量 **最少**，输出该 **方案** 放置的 **哨兵数量**



分析：

显然我们不能 暴力枚举 树中所有结点 选(1) 与 不选(0) 的状态（时间复杂度 为 $O(2^n)$。这题和没有上司的舞会本质相同。因此，会想到采用 DP 思想：考虑以结点 u为 根节点 的子树，该子树所有的 方案，可以由当前结点 放 或 不放哨兵 进行划分阶段。

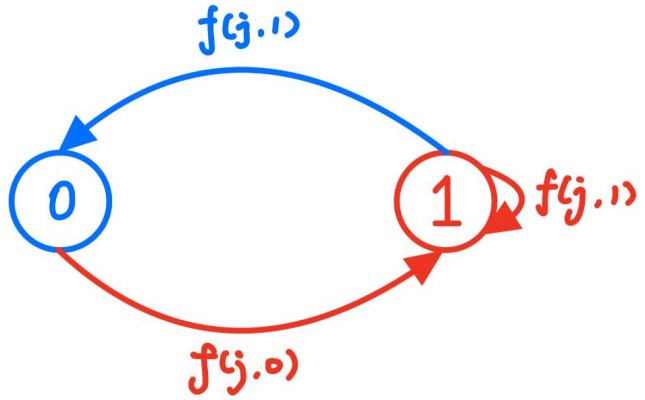
状态表示 — $f_{i,1/0}$ 集合： 以结点 i 为 **根节点** 的子树，在 i 上**放置**哨兵(1) 和**不放**哨兵(0) 的**方案**

状态表示 — $f_{i,1/0}$ 属性： 方案中，放置的哨兵数量 **最少**

分析：

状态表示 — $f_{i,1/0}$ 集合： 以结点 i 为 **根节点** 的子树，在 i 上**放置**哨兵(1) 和**不放**哨兵(0) 的**方案**

状态表示 — $f_{i,1/0}$ 属性： 方案中，放置的哨兵数量 **最少**



在 i 上**放置**哨兵(1)：

$$f_{i,1} = \sum_{i_{ch}} \min(f_{i_{ch},0}, f_{i_{ch},1}) \quad (i_{ch} \in \{ver | ver\text{是 i 的子节点}\})$$

在 i 上**不放**哨兵(0)：

$$f_{i,0} = \sum_{i_{ch}} f_{i_{ch},1} \quad (i_{ch} \in \{ver | ver\text{是 i 的子节点}\})$$

```
 7  const int N = 1510;
 8
 9  int n;
10  int h[N], e[N], ne[N], idx;
11  int f[N][2];
12  bool not_root[N];
13
14  void add(int a, int b)
15  {
16      e[idx] = b;
17      ne[idx] = h[a];
18      h[a] = idx ++ ;
19  }
```

```
29  int main()
30  {
31      cin>>n;
32      memset(h, -1, sizeof h); idx = 0;
33      memset(not_root, 0, sizeof not_root);
34      for (int i = 0; i < n; i ++ )
35      {
36          int a, b, siz;
37          cin>>a>>siz;
38          while (siz -- )
39          {
40              cin>>b;
41              add(a, b);
42              not_root[b] = true;
43          }
44      }
45      int root = 0;
46      while (not_root[root]) root ++ ;
47      dfs(root);
48      printf("%d\n", min(f[root][0], f[root][1]));
49      return 0;
50  }
```

```
21  void dfs(int u)
22  {
23      f[u][0] = 0, f[u][1] = 1;  //initialize
24      for (int i = h[u]; ~i; i = ne[i])
25      {
26          int j = e[i];
27          dfs(j);
28          f[u][0] += f[j][1];
29          f[u][1] += min(f[j][0], f[j][1]);
30      }
31  }
```